Florian Grabner **fi.do@gmx.net**

Fachwerksberechnung mit FEM I (Theorie)

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Finite Elemente Methode

- Kurzzusammenfassung

  Anhand eines einfachen Fachwerkes wird die grunlegende Funktionsweise der FEM gezeigt.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik, Mechanik, 5.Jahrgang, Maschinenbau

- Mathcad-Version:

  Mathcad 2001

- Anmerkungen bzw. Sonstiges:

  Diese Ausarbeitung war die Schwerpunktsarbeit bei der Reifeprüfung.

Sollten Sie bereits die Grundlagen der Finiten Eelemente Methode kennen, so können Sie durch einen *Doppelklick* auf **"Berechnung"** direkt zum Besipiel gelangen.

1. Einleitung

Die Lösung von Problemstellungen in der Mechanik erfolgt in den meisten Fällen durch Umlegen der Aufgabe auf ein einfaches und relativ leicht lösbares Ansatzmodell. Erreichen die Aufgabenstellungen allerdings einen höheren Grad an Komplexität, so sind diese nur mehr sehr schwer und nur mit großem, teilweise unvertretbarem Rechenaufwand zu lösen. In diesem Falle haben sich eine Anzahl von numerischen Methoden entwickelt, dessen bekannteste und wohl bedeutendste Methode die der **Finiten Elemente** ist. In den folgenden Kapiteln werden das Prinzip, die Probleme die beim Arbeiten mit der Methode entstehen und die Entwickungstendenzen aufgezeigt.

2. Allgemeine Begriffsbestimmungen

Zu Beginn sind einige grundlegende, für das Verständnis der Methode unumgängliche, Begriffe zu definieren. Obwohl versucht wird diese so einfach und verständlich wie möglich zu erklären, werden so manche Fragezeichen auftauchen. Die Verständlichkeit wird allerdings im Laufe dieser Arbeit zunehmen. Zunächst wird die etwas abstrakt klingende Bezeichnung des Verfahrens erläutert.

Finite Elemente Methode (FEM)

Die FEM ist ein diskretes Näherungsverfahren für kontinuumsmechanische Fragestellungen. Es wird eine komplexe Aufgabe in eine **endliche (finite) Anzahl von Elementen** aufgeteilt, die an einer endlichen Anzahl von Punkten verbunden sind. Somit entsteht ein diskretes System, welches durch genau definierte Ansätze lösbar gemacht wird.

Das Kontinuum (Bauteil)

Ein Kontinuum, ist ein, durch Verbindung vieler (infiniter = unendlicher) Teilstrukturen bestehendes, fortlaufendes geometrisches Gebilde. Das Verhalten einer physikalischen Größe in bzw. auf einem solchen Kontinua ist durch den entsprechenden Erhaltungssatz beschreibbar.
Zum Beispiel ein aus homogenem Werkstoff bestehender Würfel. Die, unter Last entstehenden Deformationen des Würfels lassen sich wie folgt beschreiben (differentielle Formulierung):

$$-\Delta u = -\left(\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta z^2}\right)$$

u .... Verschiebung
x,y,z .. Koordinaten

In den meisten Fällen sind solche Differentialgleichungen nicht analytisch lösbar. Die Beschreinbung dieser DGL durch eine bestimmte Anzahl von Stützstellen an diskreten Punkten, ist das eigentliche Ziel der FEM.

Das diskrete System

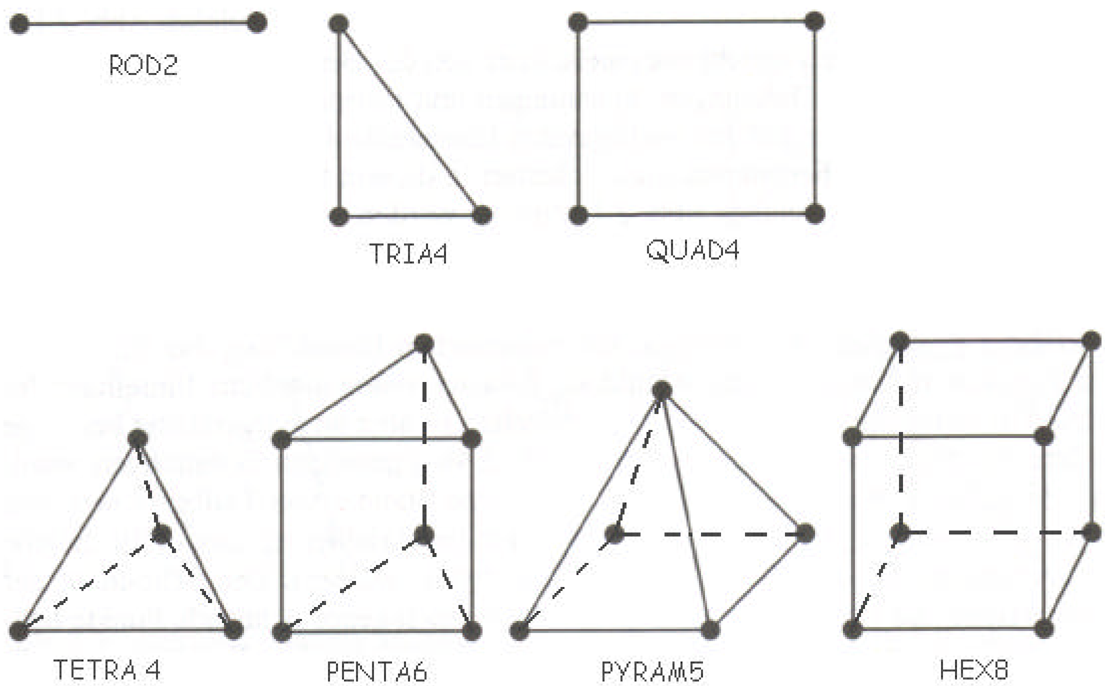
Reduziert man das Kontinuum auf eine endliche Anzahl, endlich großer Elemente, die an einer endlichen Anzahl von Punkten miteinander verbunden sind, so erhält man ein mathematisch erfaßbares System. Es handelt sich hierbei um eine Vereinfachung, eine Näherung bei der die Ergebnisse gegen den exakten Wert divigieren werden. Die Qualität der Ergebnisse hängt ab von der Anzahl und der Größe der Elemente.

Das Netz

Die Diskretisierung eines Kontinuums durch die Einteilung in einzelne Teilbereiche, nennt sich Netz. Es besteht aus Elementen, die an Knoten miteinander verbunden sind. Die Netzerzeugung, nimmt ca. 40 - 90% der Zeit für eine FEM - Analyse in Anspruch, obwohl die Vernetzung durch FEM/CAD - Schnittstellen und leistungsstarke Netzgeneratoren erheblich vereinfacht wird.

Das Element

Das Element ist ein Teilbereich, der durch eine bestimmte Anzahl von Knoten eindeutig bestimmt ist. Es gibt eine große Elementvielfalt, welche die Wahl eines Elementes für eine konkrete Fragestellung an Erfahrung und die genaue Kenntnis der einzelnen Element- eigenschaften koppelt. Die Wahl des Elementtyps beeinflußt die Qualität der Ergebnisse entscheidend, so sind Elemente höheren Grades, d.h. mit Zwischenknoten speziell für die Anpassung an komplexe Geometrien geeignet (z.B. Radien, usw.).
Man unterscheidet zwischen Stab-, Scheiben-, Schalen-, Balken-, usw. Elementen, die in verschiedenen Ausführungen, dem Anwender zur Verfügung stehen. Die folgenden Abbildungen zeigen gängige Elementtypen wie sie in kommerziellen Systemen, wie zum Beispiel COSMOS/M, verwendet werden. Die Bezeichnung der Elemente ist prinzipiell willkürlich. Für die gängigsten Elemente wurde allerdings eine Vereinbarung getroffen die besagt, dass der Elementname die Form des Elements (QUAD für Quadrat) und die Knotenzahl beinhalten sollte (QUAD4). Es gibt aber auch eine Vielzahl von Elementen, vorallem für spezielle Anwendungen, dessen Bezeichnung von System zu System verschieden ist.



Der Knoten

Ein Knoten ist ein Punkt an dem zwei oder mehrere Elemente miteinander verbunden sind. Randbedingungen wie Belastungen, Lagerungen, usw. werden auf den Knoten aufgebracht. Das bedeutet, dass eine große Knotenanzahl die Ergebnisse qualitativ besser werden läßt aber die benötigte Rechenzeit ebenfalls steigert.

Die Randbedingungen

Einflüsse der Umgebung auf das zu berechnende System werden als Randbedingungen bezeichnet, da sie zumeist an dem Rand bzw. der Oberfläche des zu untersuchenden Gebiets wirken. Da Randbedingungen sehr oft komplexe Wechselwirkungen beschreiben sind diese immer Vereinfachungen. Die Wahl der Randbedingungen beeinflußt die Ergebnisse zu einem erheblichen Teil. Unzulässige oder wenig durchdachte Randbedingungen können der Grund für fragwürdige Ergebnisse sein.

Die Steifigkeitsmatrizen

Die Begriffe der Element- bzw. Gesamtsteifigkeitsmatrix dringen schon sehr tief in den Rechenapparat der FEM ein. Die Elementsteifigkeitsmatrix ist eine, für das Element, charakteristische Größe. In ihr ist das Steifigkeitsverhalten des Elements enthalten. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix entsteht durch aufsummieren der einzelnen Elementsteifigkeitsmatrizen. Sie ist, sozusagen, die mathematische Nachbildung der vorhandenen Geometrie.

Die Koordinatensysteme

Man unterscheidet zwischen den lokalen und den globalen Koordinatensystemen. Das lokale KS ist nur für das jeweilige Element gültig und seine Lage ist beliebig. Das globale KS ist, einmal gewählt, für die Dauer der Analyse unveränderlich. Alle Größen beziehen sich darauf.
Die Bezeichnungen [r,s,t] für das lokale und [x,y,z] für das globale KS sind die gängigsten und in der Literatur oft anzutreffen.

3. Das Prinzip der FEM

Der Bereich in dem die FEM zur Anwendung kommt variiert und somit auch der Weg wie man zu den Ergebnissen kommt. Der für uns hier besprochenen kleine Teilbereich basiert auf die Ermittlung der Knotenverschiebung aus denen alle gewünschten Größen wie Auflagerkraft, Spannungen usw. ermittelt werden können.

Zu Beginn muß das Kontinuum (Bauteil) diskretisiert werden. Zu diesem Zweck wählt man einen passenden Elementtyp und eine wirtschaftlich vertretbare Elementgröße und bildet das Kontinuum durch ein diskretes System nach. Wirtschaftlich vertretbar bedeutet, dass die Qualität der Ergebnisse technisch vertretbar sein muß jedoch nicht auf Kosten von zu großer Rechenzeit. Dieser Kompromiß ist oft sehr schwer zu treffen, da große Teile mit relativ kleinen Elementgrößen vernetzt werden müssen um richtige Aussagen über die Spannungserhöhung in gefährdeten Zonen, wie zum Beispiel im Bereich von Kerben treffen zu können. Die richtige Elementgröße hängt somit zum einen von der zu vernetzenden Geometrie und zum anderen von der vorhandenen Hard- und Software ab. Die Entscheidung ist eng mit der Erfahrung des Anwenders gekoppelt.
Wie schon im vorherigen Kapitel angedeutet, ist die Art und die Anzahl der Elemente entscheidend für die Qualität der Ergebnisse. Auch der Nummerierung der einzelnen Netzkomponenten kommt, wie wir später noch sehen werden, besondere Bedeutung zu.

Als nächster Schritt sind Ansatzfunktionen zu wählen, die das physikalische Verhalten des Bauteils ausreichend genau beschreiben sollen. Aus diesen, vom gewählten Elementtyp abhängigen, Ansatz- funktionen wird die Steifigkeitsmatrix bestimmt. Dies geschieht vorerst im lokalen Koordinaten- system und wird anschließend in das globale Koordinatensystem transformiert. Dieser Vorgang ist für den einen Elementtyp nur einmal zu machen, da sich die Elementsteifigkeitsmatrix, in ihrer allgemeinen Formulierung nicht ändert.

Man bildet nun die Steifigkeitsmatrix des gesamten Systems durch Aufsummieren der Steifigkeitsmatrizen aller finiten Elemente. An diesem Punkt wird klar warum die Nummerierung so wichtig ist. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix hat in der Regel die Eigenschaft der Symmetrie, was bedeutet, dass bei optimierter Nummerierung eine Bandmatrix entsteht, die weniger Speicherplatz bedarf, da die mit Null besetzten Stellen nicht abgespeichert werden müssen. Auch die Rechenzeit zum Lösen des Gleichungsystems wird dadurch in positiver Art und Weise beeinflußt. Man erkennt also, daß bei höher werdenden Elementzahlen diese Überlegungen von großer Wichtigkeit sind.
Als nächster Schritt sind die Randbedingungen in die Rechnung miteinzubeziehen.
Dies geschieht indem man die Bedingungen anstatt der, bis jetzt als unbekannte Größen behandelten Variablen, einsetzt. Somit ist unser Gleichungssystem nicht mehr singular und damit lösbar.

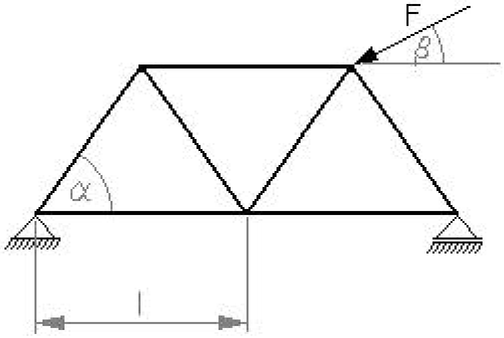
Zu guter letzt sind die gefragten Größen aus den nun bekannten Verschiebungen zu errechnen. Die Beziehungen die dafür von Nöten sind, ergeben sich bei der Herleitung der Elementsteifigkeitsmatrix.

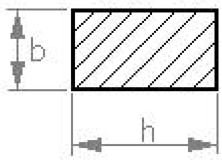
Zusammenfassend kann der Lösungsweg in folgende Schritte eingeteilt werden:

1. Diskretisierung des Kontinuums und anschließende Nummerierung der Netzkomponenten
2. Aufstellen der Elementsteifigkeitsmatrix
3. Bilden der Gesamtsteifigkeitsmatrix
4. Einbeziehen der Randbedingungen
5. Lösen des Gleichungssystems
6. Ermitteln der gefragten Größen mit Hilfe der bekannten Verschiebungen und der Ansätze aus Punkt 2.

4. Das Fachwerk

In diesem Kapitel wollen wir nun versuchen, das soeben Erarbeitete in einer mathematisch exakten Form wiederzugeben. Wir halten uns dafür an die sechs Schritte die zusammenfassend am Ende des vorigen Kapitels angeführt sind.
Wir wählen der Einfachheit halber ein Fachwerk, um den Funktionsapparat einfach und übersichtlich zu halten.

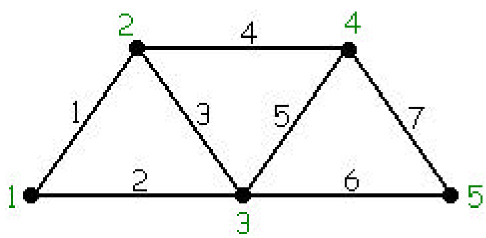




Unser Fachwerk besteht aus drei gleich- schenkeligen Dreiecken. Es ist an der linken unteren Ecke mit einem zweiwertiges Lager (Festlager) und in der rechten unteren Ecke ein einwertiges Lager (Loslager) starr gelagert. Die Belastung wir durch die schräge Kraft rechts oben eingeleitet.

- Diskretisierung des Kontinuums und anschließende Nummerierung der Netzkomponenten

Es erscheint logisch und klar, daß **ein Fachwerksstab ein Element** darstellt und somit auch die Knoten bereits bekannt sind. Nummeriert schaut unser Netz nun wie folgt aus:



Die grünen Ziffern bezeichnen die Knoten wobei die schwarzen die Elemente bezeichnen. In unserem Fall ist:

Knotenanzahl $n := 5$

Elementanzahl $s := 7$

- Aufstellen der Elementsteifigkeitsmatrix

Wir nennen unser Element **ROD 2**. Andere Bezeichnungen wie zum Beispiel TRASS2D sind in der Praxis ebenfalls zu finden. Wie schon im vorherigen Kaptitel erklärt ist diese Bezeichnung willkürlich. Wir nehmen an, daß unser Fachwerk aus einem homogenen Werkstoff besteht und wir uns immer im Hook'schen Bereich des Spannungs-Dehnungs Diagramm befinden. Für diese Bedingungen sind uns aus der Festigkeitslehre folgende drei Beziehungen für einen geraden, prismatischen Zugstab mit konstantem Querschnitt bekannt:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad \text{(Gl. 1)} \qquad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad \text{(Gl. 2)} \qquad \sigma = E \cdot \varepsilon \quad \text{(Gl. 3)}$$

σ = Spannung
ε = Dehnung
F = Kraft
A = Querschnittsfläche
Δl = Verlängerung
l = Länge
E = Elastizitätsmodul

Anm: Während der gesamten Herleitung gilt das Einheitensystem [N,mm]

Definieren wir nun die Steifigkeit des Elementes als Quotient aus Kraft und Verlängerung so kann geschrieben werden:

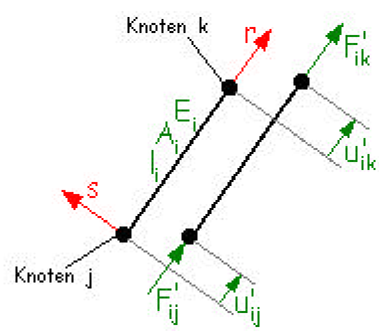
$$k = \frac{F}{\Delta l} \qquad \text{(Gl. 4)} \qquad \text{mit} \qquad F = \sigma \cdot A = E \cdot \varepsilon \cdot A \qquad \text{und}$$

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l$$

ergibt eingesetzt und vereinfacht für die Steifigkeit:

$$k = \frac{E \cdot A}{l} \qquad \text{(Gl. 5)}$$

Als nächstes betrachten wir ein Element in seinem lokalen Koordinatensystem, zum Beispiel Element 1. Wir definieren **i** für die Nummer des Elementes und **j** bzw. **k** als die beiden dazupassenden Knoten.



Anm: Größen mit ['] beziehen sich auf das lokale Koordinatensystem.

Halten wir gedanklich den **Knoten j fest** benötigen wir eine Kraft

$$F'_{ik} = u'_{ik} \cdot k_i \qquad \text{(vergl. Gl. 4)}$$

um dem Stab eine Verlängerung von u'_{ik} zuzufügen. Bei dieser Verschiebung erhält der Knoten **j** eine Reaktionskraft der Größe

$$F'_{ij} = u'_{ik} \cdot \left(-k_i\right)$$

Hält man nun den **Knoten k fest** und verlängert den Stab um u'_{ij} so erhält man die Kräfte:

$$F'_{ij} = u'_{ij} \cdot k_i \qquad F'_{ik} = u'_{ij} \cdot \left(-k_i\right)$$

Betrachten wir den allgemeinen Fall, also keines der beiden Enden ist eingespannt (Skizze), so erhalten wir die beiden Kräfte als Summe der beiden Einzelkomponenten:

$$F'_{ij} = u'_{ij} \cdot k_i + u'_{ik} \cdot \left(-k_i\right) \qquad \text{(Gl. 6)}$$

bzw.

$$F'_{ik} = u'_{ij} \cdot \left(-k_i\right) + u'_{ik} \cdot k_i \qquad \text{(Gl. 7)}$$

In Matrizendarstellung geschrieben gilt:

$$\begin{pmatrix} F'_{ij} \\ F'_{ik} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_i & -k_i \\ -k_i & k_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u'_{ij} \\ u'_{ik} \end{pmatrix}$$

Hebt man k_i heraus und setzt die anfangs hergeleitete Beziehung für die Steifigkeit ein, so erhält man

$$\begin{pmatrix} F'_{ij} \\ F'_{ik} \end{pmatrix} = \frac{E_i \cdot A_i}{l_i} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u'_{ij} \\ u'_{ik} \end{pmatrix} \qquad \text{(Gl. 8)}$$

oder abgekürzt

$$FF'_i = KK'_i \cdot uu'_i$$

Anm: Doppelbuchstaben stehen für Matrizen!

Die Matrix **KK'_i** nennt sich **Elementsteifigkeitsmatrix im lokalen Koordinatensystem** [r,s,t] und hat die Form:

$$KK'_i = \frac{E_i \cdot A_i}{l_i} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(Gl. 9)}$$

Betrachten wir nun das Element im globalem Koordinatensystem [x,y,z] so gilt für die Verschiebung:

$$u'_{ij} = u_{ij} \cdot \cos(\alpha_i) + v_{ij} \cdot \sin(\alpha_i) \qquad \text{(Gl. 10)}$$

$$u'_{ik} = u_{ik} \cdot \cos(\alpha_i) + v_{ik} \cdot \sin(\alpha_i) \qquad \text{(Gl. 11)}$$

oder in Matrizendarstellung

$$\begin{pmatrix} u'_{ij} \\ u'_{ik} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_i) & \sin(\alpha_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha_i) & \sin(\alpha_i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{ij} \\ v_{ij} \\ u_{ik} \\ v_{ik} \end{pmatrix}$$

$$uu'_i = TT_i \cdot uu_i \qquad \text{(Gl. 12)}$$

Die Kräfte lassen sich wie folgt ins globale Koordinatensystem transformieren.

$$F_{ijx} = F'_{ij} \cdot \cos(\alpha_i) \qquad F_{ikx} = F'_{ik} \cdot \cos(\alpha_i)$$

bzw. (Gl. 13- 16)

$$F_{ijy} = F'_{ij} \cdot \sin(\alpha_i) \qquad F_{iky} = F'_{ik} \cdot \sin(\alpha_i)$$

Zusammengefaßt in Matrizenschreibweise gilt somit

$$\begin{pmatrix} F_{ijx} \\ F_{ijy} \\ F_{ikx} \\ F_{iky} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_i) & 0 \\ \sin(\alpha_i) & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F'_{ij} \\ F'_{ik} \end{pmatrix} \qquad \text{(Gl. 16)}$$

$FF_i = TT_i^T \cdot FF'_i$ Setzen wir nun Gleichung 8 ein so erhalten wir

$FF_i = TT_i^T \cdot KK'_i \cdot uu'_i$ erweitern wir mit Gleichung 12 so ergibt das

$FF_i = TT_i^T \cdot KK'_i \cdot TT_i \cdot uu_i$ oder

$FF_i = KK_i \cdot uu_i$ mit

$KK_i = TT_i^T \cdot KK'_i \cdot TT_i$ der **Elementsteifigkeitsmatrix im globalen Koordinatensystem**. (Gl. 18)

In ausgeschriebener Form hat die Elemensteifigkeitsmatrix im globalen Koordinatensystem:

$$KK_i = \frac{E_i \cdot A_i}{l_i} \cdot \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha_i) & \cos(\alpha_i)\cdot\sin(\alpha_i) & -\cos^2(\alpha_i) & -\cos(\alpha_i)\cdot\sin(\alpha_i) \\ \cos(\alpha_i)\cdot\sin(\alpha_i) & \sin^2(\alpha_i) & -\cos(\alpha_i)\cdot\sin(\alpha_i) & -\sin^2(\alpha_i) \\ -\cos^2(\alpha_i) & -\cos(\alpha_i)\cdot\sin(\alpha_i) & \cos^2(\alpha_i) & \cos(\alpha_i)\cdot\sin(\alpha_i) \\ -\cos(\alpha_i)\cdot\sin(\alpha_i) & -\sin^2(\alpha_i) & \cos(\alpha_i)\cdot\sin(\alpha_i) & \sin^2(\alpha_i) \end{bmatrix}$$

Die Elementsteifigkeitsmatrix ist charakteristisch für das Element ROD2.
Dieser Schritt muß nun nicht jedes Mal von neuem getätigt werden sondern das obere Ergebnis kann gleich übernommen werden.
Im Falle des ROD2 - Elements kann sie exakt berechnet werden. Dies spiegelt den Näherungscharakter der FEM allerdings nicht wieder. Da man in der Regel auf Ansatzfunktionen, die das Verhalten der Elemente beschreiben sollen, angewiesen ist, wird diese Herleistung der Elementsteifigkeitsmatrix mittels Ansatzfunktionen im Anhang zusätzlich angeführt.

- Bilden der Gesamtsteifigkeitsmatrix

Zur Bildung der Gesamtsteifigkeitsmatrix halten wir uns an folgende formelle Formel

$$KK_g = \sum_{i=1}^{n} KK_i \qquad \text{(Gl. 19)}$$

Wir summieren dabei die Beträge der Elementsteifigkeitsmatrizen an den entsprechenden Stellen. Zuerst schauen wir uns den Aufbau der Elementsteifigkeitsmatrix etwas genauer an und erkennen folgenden Aufbau:

$$KK_i = \begin{pmatrix} KE_i & -KE_i \\ -KE_i & KE_i \end{pmatrix} \quad \text{mit} \qquad \text{(Gl. 20)}$$

$$KE_i = k_i \cdot \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha_i) & \cos(a_i)\cdot\sin(\alpha_i) \\ \cos(a_i)\cdot\sin(\alpha_i) & \sin^2(\alpha_i) \end{bmatrix} \qquad \text{(Gl. 21)}$$

Wir tragen die Elementsteifigkeitsmatrix des Elements 1 nun wie folgt ein:

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & \text{Knoten} \\ KK_g = & \left[\begin{array}{c} \boxed{KE_1} + \boxed{KE_2} \\ \boxed{-KE_1} \\ \boxed{-KE_2} \\ 0 \\ 0 \end{array}\right. & \begin{array}{c} \boxed{-KE_1} \\ \boxed{KE_1} + KE_3 + KE_4 \\ -KE_3 \\ -KE_4 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \boxed{-KE_2} \\ -KE_3 \\ \boxed{KE_2} + KE_3 + KE_5 + KE_6 \\ -KE_5 \\ -KE_6 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ -KE_4 \\ -KE_5 \\ KE_4 + KE_5 + KE_7 \\ -KE_7 \end{array} & \left.\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -KE_6 \\ -KE_7 \\ KE_6 + KE_7 \end{array}\right] & & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \end{array}$$

Die Elementsteifigkeitsmatrix wird in der Form von Gleichung 20 eingetragen, wobei die beiden Spalten die Knoten darstellen an denen das Element fixiert ist.

Zum Beispiel: Element 1 ist im Knoten 1 und 2 fixiert (rote Linien)
Element 2 ist im Knoten 1 und 3 fixiert (grüne Linien)

Jeder Eintrag in der Gesamtsteifigkeitsmatrix stellt eine Matrix der Größe (2x2) dar, d.h. $\mathbf{KK_g}$ hat die Größe (2n x 2n).

- Einbeziehen der Randbedingungen

Wir ersetzen nun die bekannten Größen durch ihre Werte und erkennen, dass die Auflagerkräfte [F_{1x}, F_{1y}, F_{5y}] erwartungsgemäß unbekannt bleiben, die entsprechenden Verschiebungen [u_1, v_1, v_5] aber bekannt sind, sie sind Null. Genau umgekehrt verhält es sich mit den anderen Knoten. Während die Verschiebungen unbekannt sind, kennen wir die entsprechenden Kräfte (unbelastete Knoten haben die Kräfte Null - Knoten 2 und 3). Um das System aber lösbar zu machen, streichen wir die Zeilen und Spalten jener Freiheitsgrade, die Null sind (in unserem Fall Zeile und Spalte 1,2 und 10). Dies geschieht durch Nullsetzen aller Stellen außer der Stellen auf der Haupdiagonalen von $\mathbf{KK_g}$ die mit 1 besetzt werden. Unser Gleichungssystem hat nun folgende Form: (Platzhalter stehen für die entsprechenden Werte)

$$\begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F\cdot\cos(\beta) \\ -F\cdot\sin(\beta) \\ 0 \\ F_{5y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{pmatrix}$$

Nach Streichen der Spalten und Zeilen mit Freiheitsgrad Null ergibt sich folgende Form:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F\cdot\cos(\beta) \\ -F\cdot\sin(\beta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dieses reduzierte Gleichungssystem kann nun mittels Gauß oder ähnliche Verfahren gelöst werden. Die dadurch erhaltenen Größen für die Verschiebungen u_2 bis u_5 und v_2 bis v_4 werden in das ursprüngliche Gleichungssystem eingesetzt und somit können die Lagerkräfte errechnet werden.

- Ermitteln der gefragten Größen

Die Stabkräfte berechnen sich aus Gleichung 8 unter Einbeziehung von Gleichung 12, aus der folgende Beziehung resultiert:

$$FF'_i = KK'_i \cdot TT_i \cdot uu_i \qquad \text{(Gl. 22)}$$

Die Spannungen und Dehnungen lassen sich dann einfach über die Gleichungen 1 und 3 errechnen:

$$\sigma = \frac{F}{A} \qquad \varepsilon = \frac{F}{E \cdot A}$$

Der soeben aufgezeigte Weg ist mit Hilfe des Programmes MathCAD 7 durchgerechnet und vollständig im Anhang dokumentiert. Die Ergebnisse die daraus resultieren, werden mit den Ergebnisse eines kommerziellen FE - Programmes (COSMOS/M) und einer konventionellen Methode (Ritterschnitt) verglichen und etwaige Abweichungen besprochen.

5. Probleme beim Arbeiten mit der FEM

Die FEM ist eines der wichtigsten Werkzeuge zur theoretischen Überprüfung, physikalischer Vorgänge. Sie ist sehr komplex und der Wahl der einzelnen Komponenten kommt besonders große Bedeutung zu, wie schon in den vorigen Kapiteln angedeutet. Welche Fehler dabei entstehen können und welche Auswirkungen diese haben möchte ich hier kurz erörtern.
Wir wissen, dass ein Modell generell aus drei Komponenten besteht:

- Geometrie
- Werkstoff
- Randbedingungen

Einer der ersten Schritte ist das Aufstellen eines diskreten Systems. Es sollte ein sinnvolles Abbild des zu berechnenden Systems und dessen Verhalten unter Last darstellen. Dieser Rahmen darf durch etwaige Vereinfachungen nicht gesprengt werden. Mögliche Maßnahmen zur Vereinfachung wären zum Beispiel die Ausnützung vorhandener Symmetrien oder die Wahl eines axialsymmetrischen Schnittes, anstatt des gesamten 3-dimensionalen Körpers. Sind diese Schritte abgeschlossen und steht die Geometrie des Modells fest so ist ein passender Elementtyp zu wählen. Diese Wahl ist entscheidend für die Richtigkeit und Qualität der Ergebnisse. Gleichzeit ist auch eine wirtschaftlich und technisch vertretbare Elementgröße festzulegen.
Eine weitere Komponente unseres Modells ist die Wahl eines passenden Werkstoffmodells. Im Falle unseres Fachwerkes haben wir uns für das Modell eines homogenen Werkstoffes mit reversiblen linear - elastischem Verhalten entschieden. Für unseren Fall und viele andere ist dieses Werkstoffmodell genügend, wenn wir aber an Eigenspannungen aus Umformungsvorgängen oder thermischen Lasten denken oder Werkstoffinhomogenitäten, Mikrorisse usw. so wäre dieses Modell unter Umständen unzulässig. Sehr häufig gelingt es aber nicht die tatsächlichen Verhältnisse nachzubilden, da diese zu komplex oder gar nicht genau bekannt sind.
Auch die Bestimmung der Randbedingungen ist eine sehr heikle Angelegenheit. Es ist zu entscheiden welche äußeren Einflüsse für die Beanspruchung maßgeblich sind und diese sind entsprechend genau abzubilden. Die Wechselwirkung zwischen dem Bauteil und der Umgebung nachzubilden ist aber sehr häufig das Problem. Wieder sind Vereinfachungen zu treffen, die sich im Rahmen der Zulässigkeit bewegen müssen.
Wir sehen also, daß sehr viele Vereinfachungen und Annahmen zu treffen sind die sich natürlich auf die Richtigkeit der Ergebnisse niederschlagen. Falsche Ergebnisse die zum Beispiel aus unzulässigen Randbedingungen resultieren werden dann sehr oft zurecht interpretiert. Es erfordert viel Erfahrung und gewisse Grundkenntnisse der Methode um ein erfolgreicher Anwender der FEM zu werden. Zweiteres ist durch den Blackbox Charakter der FE-Programme nicht immer gewährleistet und somit eine Quelle für Fehler.