Schwarz Herwig herwig.schwarz@htl-kapfenberg.ac.at
Florian Grabner florian.grabner@gmx.at

Druckverlust in Rohrleitungen

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Energiegleichung, Kontinuitätsgleichung

- Kurzzusammenfassung

  Die Problematik des Druckverlustes bei stationären inkompressiblen Strömungen wird aufgegriffen. Es wird ein Leitfaden für die grundsätzliche Berechnung eines geraden durchströmten Rohres, mit konstantem Durchmesser, gelegt und die Anwendung anhand eines praktischen Beispiels gezeigt.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Mechanik, 3.Jahrgang, Maschinenabu

- Mathcad-Version:

  Mathcad 2000

- Literaturangaben:

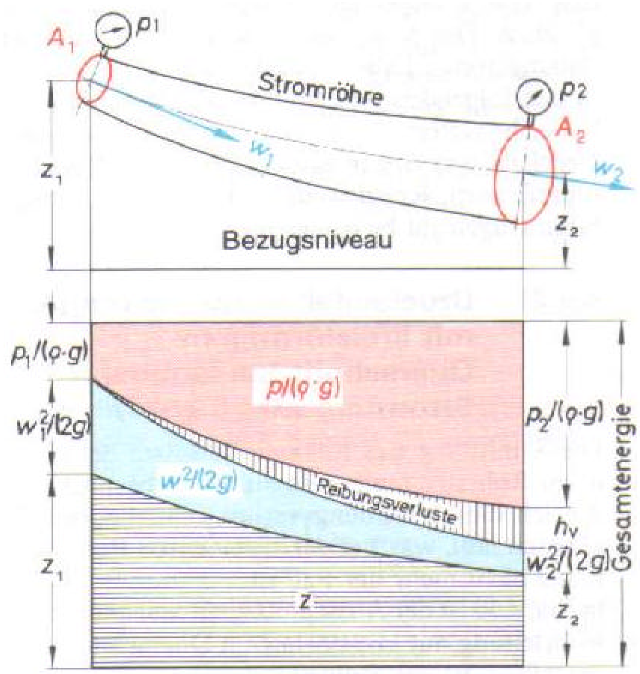
  Technische Strömungslehre, Willi Bohl, Kamprath-Reige Vogel Verlag

Wir wissen aus eigener Erfahrung, dass jeder Vorgang reibungsbehaftet ist. Dies gilt auch für ein durchströmtes Rohr. Nehmen wir an, es handelt sich um eine stationäre inkompressible Strömung und betrachten wir deren Energieumsetrzung zwischen zwei beliebigen Punkten 1 und 2 (Bild 1), so erkennen wir drei verschieden Energieformen.

- Lageenergie $g \cdot z$

- kinetische Energie $\frac{w^2}{2}$

-Druckenergie $\frac{p}{\rho}$



(Bild 1)

Die beiden Höhen sind von der Reibung nicht abhängig, d.h. die Lageenergie ist reibungs-unabhängig
Wir wissen auch, dass die Reibung auf den durchströmten Querschnitt und den Volumenstrom keinen Einfluss hat, d.h. Die kinetische Energie ist ebenfalls reibungsunabhängig..
Reibungsverluste äußern sich als Druckverluste!

In der Energiebilanz läßt sich das wie folgt ausdrücken:

$$g \cdot z_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} = g \cdot z_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} + \frac{\Delta p_V}{\rho} \quad \text{oder} \quad z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{w_1^2}{2 \cdot g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{w_2^2}{2 \cdot g} + h_V$$

$\frac{\Delta p_V}{\rho}$ ... ist der Reibungsverlust

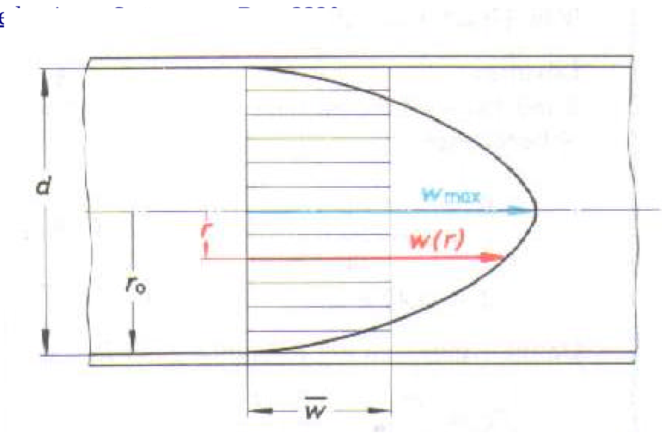
h_V ... ist die Verlusthöhe

Diese Reibungsverluste resultieren zum einen aus den **Schubspannungen zwischen den Strömungsschichten** bei laminarer Strömung und zusätzlich aus den **Mischungsverlusten infolge der Geschindigkeitsschwankungen** bei der turbulenten Strömung.
Um den Druckverlust bestimmen zu können, müssen wir uns zuerst die Strömungsverhältnisse bei

- **laminarer Strömung**
- **turbulenten Strömung**

entwas genauer anschauen.

Di



n einem waagrechten Rohr mit Durchmesser 1 = 2 r_0 strömen die Flüssigkeitsteilchen in chsparallelen Schichten. Die Geschwindigkeit n der Rohrwand ist null und steigt zur Mitte in parabolisch an (Bild 2). Der Verlauf läßt sich urch das **Stokessche Gesetz** darstellen.

$$w = \frac{p_1 - p_2}{4 \cdot \eta \cdot L} \cdot \left(r_0^2 + r^2\right)$$

η ... dynamische Viskosität

Wir sehen, dass die Geschwindigkeit sich mit dem Radius ändert,d.h. die Flüssigkeitsschichten bewegen sich mit jeweils anderen Geschwindigkeiten, so dass Schubspannungen auftreten.

Aus dem Stokessche Gesetz kann man den Druckverlust der folgende Form herleiten.

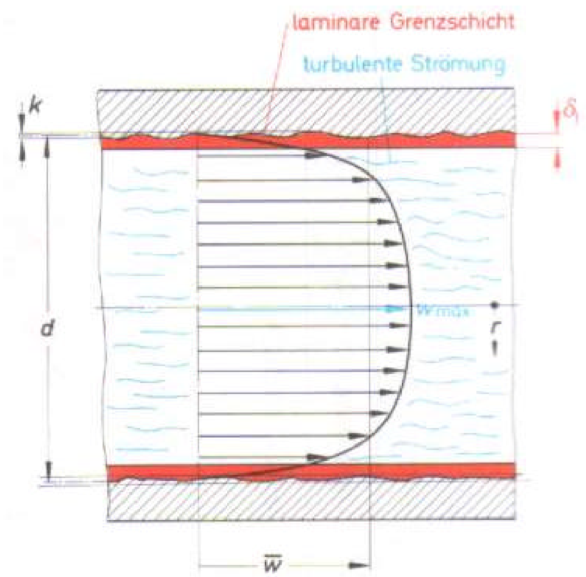
$$h_v = \frac{64}{Re} \cdot \frac{L}{d} + \frac{w_m^2}{2 \cdot g}$$

w_m ... mittlere Geschidigkeit

Den Ausdruck mit der Reynolds-Zahl bezeichnet man auch als Rohreibungszahl λ.

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

Die tubulente Strömung:



(Bild 3)

In der Praxis haben wir es meistens mit einer turbulenten Strömung zu tun. Hierbei spielt neben der Reynolds-Zahl auch noch die Wandrauhigkeit eine entscheidente Roll, d.h. die Bestimmung des Geschwindigkeitsverlaufes und später des Druckverlustes auf rein theoretischem Wege ist nicht mehr möglich.

Auch bei der turbulenten Strömung haftet die Flüssigkeit an der Rohrwand. Innerhalb einer dünnen Schicht baut sich die Geschwindigkeit wie bei der laminaren Strömung parabolisch auf. Man spricht von der laminaren Grenzschicht.
Der Verlauf flacht im Bereich der turbulenten Strömung allerdings wesentlich ab (Bild 3).

Hydraulisch glatte Rohre:

Man spricht dann von Hydraulisch glatten Rohren, wenn die laminare Grenzschicht alle Oberflächenunebenheiten abdeckt, so dass keine Spitze in den turbulenten Strömungsbereich ragt (wie im Bild 3 gezeichnet).
In diesem Bereich hängt der Druckverlust, d.h. die Rohrreibungszahl nur von der Reynolds-Zahl ab, die, wie wir wissen, wiederum eine Funktion der Geschwindigkeit ist.
Es gibt für bestimmte Bereiche der Reynolds-Zahl verschiedene empirische Formeln.

Hydraulisch glatt wenn $Re \cdot \frac{k}{d} < 65$

k ... Rauhigkeitswert

d ... Durchmesser des Rohres

Re ... Reynolds-Zahl

Bereich: $2320 < Re < 10^5$

Formel von Blasius $\lambda = 0.3164 \cdot Re^{-0.25}$

Bereich: $10^5 < Re < 5 \cdot 10^6$

Formel von Nikuradse $\lambda = 0.0032 + 0.221 \cdot Re^{-0.237}$

Bereich: $Re > 10^6$

Formel von Prandtl und v. Karman $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \log\left(Re \cdot \sqrt{\lambda}\right) - 0.8$

Hydraulisch rauhe Rohre:

Bei zunehmender Geschwindigkeit wird die laminare Grenzschicht immer dünner, so das vereinzelt Unebenheiten schon in den turbulenten Bereich hinein ragen. Hat die Geschwindigkeit je nach Wandrauhigkeit einen bestimmten Wert erreicht, so das alle Unebenheiten in den turbulenten Bereich hineinragen, dann spricht man von Hydraulisch rauhen Rohren. Ab diesem Punkt hängt die Rohrreibungszahl λ nur mehr von der Rauhigkeit und nicht mehr von der Geschwindigkeit ab.

Hydraulisch rauh wenn $Re \cdot \frac{k}{d} > 1300$

Formel von Prandtl und Nikuradse $$\lambda = \frac{1}{\left(2 \cdot \log\left(3.71 \cdot \frac{d}{k}\right)\right)^2}$$

Formel von Moody $$\lambda = 0.0055 + 0.15 \cdot \left(\frac{k}{d}\right)^{\frac{1}{3}}$$

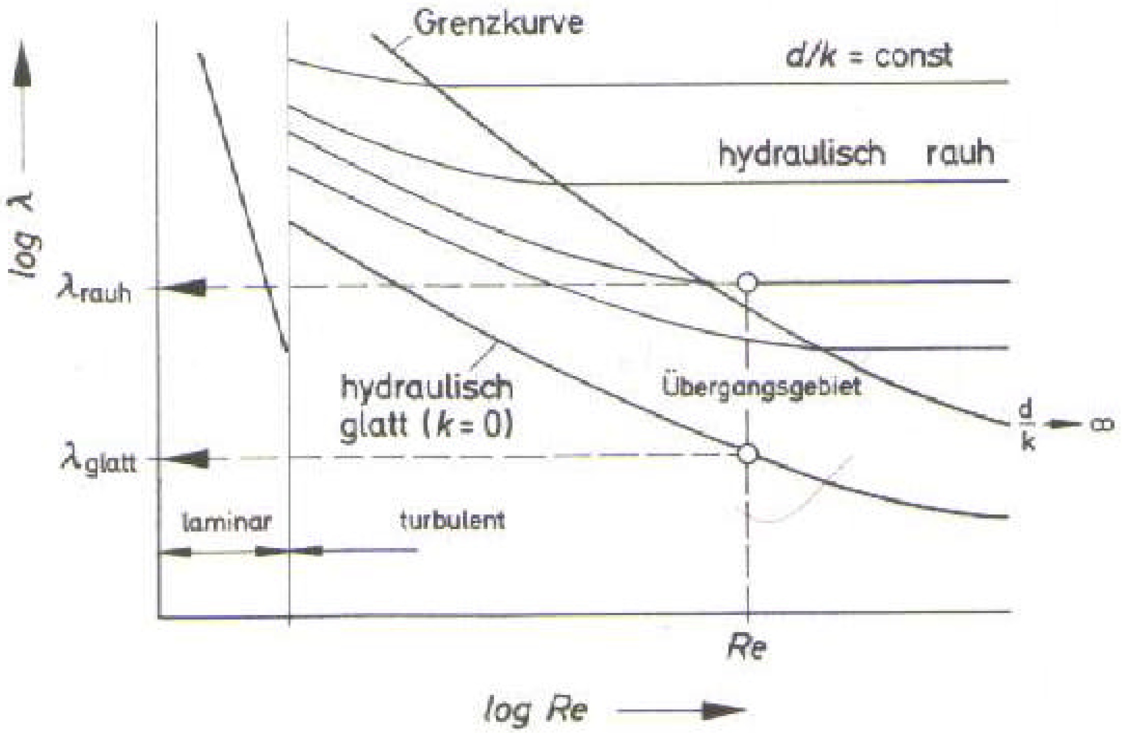
Übergangsgebiet:

Das gesamte Gebiet zwischen Hydraulisch glatt und Hydraulisch rauh, bezeichnet man als Übergangsgebiet.

Übergangsgebiet wenn $65 < Re \cdot \frac{k}{d} < 1300$

Formel von Prandtl-Colebrook $$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log\left(\frac{2.51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{k}{d} \cdot 0.269\right)$$

In der Praxis wählt man sehr oft den leichteren Weg und sucht die λ-Werte aus einem Diagramm heraus. Dies ist mit Sicherheit die schnellste Methode, wenn man aber Cumputerunterstützt arbeiten möchte greift man eher auf die Formeln zurück. Es sei hier das prinzipielle Aussehen dieses Diagrammes gezeigt.



Den Druckverlust errechnen wir nach der bereitsbekannten Gleichung:

$$\Delta p_V = \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot w_m^{\;2} \qquad \text{bzw.} \qquad h_V = \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{w_m^{\;2}}{2 \cdot g}$$

wobei λ für den entsprechenden Fall nach den oben angeführten Formeln zu berechnen ist.

Hier sei noch erwähnt, dass die k-Werte in den Formeln und auch im Diagramm nicht identisch mit der technischen (natürlichen) Rauhigkeit ist, sondern sie sind als äquivalente (künstliche) Sandrauhigkeiten definiert. Die Übernahme dieses umstrittenen unpräzisen Begriffes erfolgt nur, weil keine ausreichenden Versuchswerte existieren; d.h. die gesamte Berechnung des Druckverlustes ergibt nur ein sehr unpräzises Ergebnis. In der Praxis reichent diese Abschätzung des Druckverlustes aber aus.

Leitfaden für die Berechnung:

Die Berechnung besteht im wesentlichen aus drei Punkten.

ACHTUNG: Bei den folgenden Gleichungen handelt es sich um **Zahlenwertgleichungen**, d.h. es müssen die Werte in den angegebenen Werten eingegeben werden um das Ergebnis in der angegeben Einheit zu erhalten !!!

1. Bestimmung der Reynolds-Zahl

$$Re = \frac{w \cdot d \cdot 10^{-3}}{\nu}$$

Re ... Reynolds-Zahl [ ]
w ... Strömungsgeschwindigkeit [m/s²]
d ... Rohrdurchmesser [mm]
ν ... kinematische Viskosität (Zähigkeit) [m²/s]

Für Wasser gilt die Formel:

$$\nu = \frac{1.78 \cdot 10^{-6}}{1 + 0.0337 \cdot tonne + 0.000221 \cdot tonne^{2}}$$

ν ... kinematische Viskosität (Zähigkeit) [m²/s]
tonne`emperatur [°C]

2. Bestimmung des Rohrreibungskoeffizienten

Wie wir aus den vorigen Betrachtungen gesehen haben, errechnet sich der Rohrreibungskoeffizient je nach Strömung nach einer anderen Gleichung. Mit der nun bekannten Reynolds-Zahl müssen wir zuerst die Art der Strömung bestimmen.

$Re < 2320$ laminare Strömung, d.h. $\lambda = \frac{64}{Re}$

$Re > 2320$ turbulente Strömung; wir müssen nun noch überprüfen ob die Strömung im Berecih der hydr. glatten Rohre oder der hydr. rauhen Rohre bzw. im Übergangsgebiet liegt.

$Re \cdot \frac{k}{d} < 65$ hydr. glatte Rohre; d.h. wenn

$2320 < Re < 10^5$ $\lambda = 0.3164 \cdot Re^{-0.25}$

$10^5 < Re < 10^6$ $\lambda = 0.0032 + 0.221 \cdot Re^{-0.237}$

$Re > 10^6$ $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \log\left(Re \cdot \sqrt{\lambda}\right) - 0.8$

$65 < Re \cdot \frac{k}{d} < 1300$ Übergangsgebiet, d.h. $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log\left(\frac{2.51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{k}{d} \cdot 0.269\right)$

$Re \cdot \frac{k}{d} > 1300$ hydr. rauhe Rohre, d.h. $\lambda = \frac{1}{\left(2 \cdot \log\left(3.71 \cdot \frac{d}{k}\right)\right)^2}$

3. Berechnung der Druckverlustes

Mit dem für den entsprechenden Bereich berechnetetn Rohrreibungskoeffizienten kann man den Druckverlust einfach berechnen mit der Gleichung:

$$\Delta p_V = \lambda \cdot \frac{L}{d \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot w_m^2 \cdot 10^{-5}$$

Δp_V ... Druckverlust [bar]

λ ... Rohrreibungskoeffizienten [ ]

L ... Rohlänge [m]

d ... Rohrdurchmesser [mm]

ρ ... Dichte von Wasser [kg/m³] $\rho = 1000$ in [kg/m³]

w_m ... mittlere Geschwindigkeit [m/s]

Programm zum berechnen des Druckverlustes

Wir sehen, dass die Berechnung des Druckverlustes recht aufwendig ist. Deshalb packen wir die Gleichungen in ein Programm und automatisieren die Berechnung soweit wie möglich.
Folgende Größen müssen aus der Angabe bekannt sein:

- Volumenstrom oder Strömungsgeschwindigkeit und Rohrdurchmesser
- Länge des durchströmten Rohres
- Die Wandrauhigkeit k
- Die Temperatur des Wassers

Um das Programm kurz und einfach zu halten geben wir anstatt des Volumenstromes die Strömungsgeschwindigkeit und Rohrdurchmesser an. Ist der Volumenstrom und nur eine der beiden obrigen Größen bekannt, so können nach folgendem Schema die beiden gewünschten Größen ermittelt werden.

$x := 1$

Given

Anm.: **Für x** muss dann die entsprechende gesuchte Größe (**w_m oder d**) **eingesetzt werden**.

$$V_p = \frac{\pi \cdot \left(d \cdot 10^{-3}\right)^2}{4} \cdot w_m$$

Da wir noch keinen Wert für den Volumenstrom angegeben haben erscheint dieser Fehler!

$x := \mathrm{Find}(x)$

- Programm zum ermitteln der Reynolds-Zahl

$$\mathrm{Reynold}(w_m, d, tonne, \nu) := \left| \begin{array}{l} \nu \leftarrow \dfrac{1.78 \cdot 10^{-6}}{1 + 0.0337 \cdot tonne + 0.000221 \cdot tonne^2} \quad \text{if} \quad \nu = 0 \\ Re \leftarrow \dfrac{w_m \cdot d \cdot 10^{-3}}{\nu} \\ Re \end{array} \right.$$

Wir erhalten Re ... Reynolds-Zahl [ ]

wenn w_m ... mittlere Strömungsgeschwindigkeit [m/s²]

d ... Rohrdurchmesser [mm]

$tonne$ ˙emperatur [°C]

ν ... kinematische Viskosität [m²/s]

Anm: $\nu = 0$ für Wasser

$\nu > 0$ Eingabe relevant; t irrelevant (z.B.: t = 0)

- Programm zum ermitteln des Rohrreibungskoeffizienten

Für den turbulenten Strömungszustand im Bereich der hydraulisch glatten Rohre wenn die Reynolds-Zahl größer als 10^6 ist bzw. im Übergangsgebiet läßt sich λ nur mehr numerisch lösen. In MathCAD können wir dafür den *VORGABE-SUCHEN-Algorithmus* verwenden. Diesen kann man **in einem Programm nicht anwenden** (es sei dann man programmiert ihn nach --> sehr großer Aufwand, unrentabel). Aus diesem Grund müssen wir diesen Lösungsalgorithmus außerhalb des Programmes schreiben.

$$\mathrm{lambda}(Re, k, d) := \left| \begin{array}{l} \lambda \leftarrow \dfrac{64}{Re} \quad \text{if} \quad Re < 2320 \\ \text{otherwise} \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{if} \quad Re \cdot \dfrac{k}{d} \le 65 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \lambda \leftarrow 0.3164 \cdot Re^{-0.25} \quad \text{if} \quad Re < 10^5 \\ \lambda \leftarrow -1 \quad \text{if} \quad Re > 10^6 \\ \lambda \leftarrow 0.0032 + 0.221 \cdot Re^{-0.237} \quad \text{otherwise} \end{array} \right. \\ \lambda \leftarrow \dfrac{1}{\left(2 \cdot \log\left(3.71 \cdot \dfrac{d}{k}\right)\right)^2} \quad \text{if} \quad Re \cdot \dfrac{k}{d} \ge 1300 \\ \lambda \leftarrow -2 \quad \text{otherwise} \end{array} \right. \\ \lambda \end{array} \right.$$

[mm]

˙ in [mm]

Wenn $\lambda = -1$ dann muss λ durch den Zusatz 1 berechnet werden.

Wenn $\lambda = -2$ dann muss λ durch den Zusatz 2 berechnet werden.

Wenn $\lambda \neq -1 \neq -2$ dann entspricht das Ergebnis dem gefragten λ.

Zusatz 1:

$\lambda := 1$

Given

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \log\left(Re \cdot \sqrt{\lambda}\right) - 0.8$$

$\lambda := \mathrm{Find}(\lambda)$

Anm.: Da wir noch keinen Wert für den Rohreibungskoeffizienten angegeben haben erscheint dieser Fehler.

Zusatz 2:

$\lambda := 1$

Given

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log\left(\frac{2.51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{k}{d} \cdot 0.269\right)$$

$\lambda := \mathrm{Find}(\lambda)$

Anm.: Da wir noch keinen Wert für den Rohrreibungskoffizienten angegeben haben erscheint dieser Fehler.

- Der Druckverlust

Man erhält Δp_V ... Druckverlust in [bar] wenn

λ ... Rohrreibungskoeffizienten [ ] ρ ... Dichte in [kg/m³]

L ... Rohlänge [m]

d ... Rohrdurchmesser [mm] w_m ... mittlere Geschwindigkeit [m/s]

$$\Delta p_V := \lambda \cdot \frac{L}{d \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot w^2 \cdot 10^{-5}$$

Anm.: Da wir noch keinen Wert für den Durchmesser angegeben haben erscheint dieser Fehler.

Wir wollen nun ein konkretes Beispiel rechnen um zu zeigen wie man diese Programme anwendet.

Gegeben: Ein 1 km langes Rohr wird mit einem konstanten Durchmesser von 700 mm wird mit 40° heißen Wasser durchströmt, wobei der Durchsatz 2 m³/s beträgt. Das Rohrreibung kann mit k = 0.05 mm angenommen werden (Dichte ρ = 992.3 [kg/m³]).

Volumenstrom [m³/s]	$V_p := 2$
Rohrdurchmesser [mm]	$d := 700$
Rohrlänge [m]	$L := 1000$
Wassertemperatur [°C]	$tonne := 40$
Rohreibung [mm]	$k := 0.05$
Dichte [kg/m³]	$\rho := 992.3$

Gesucht: Berechnen sie den Druckabfall der sich bei der durchströmung des Rohres ergibt.

1. Schritt: Ermitteln der mittleren Strömungsgeschwindigkeit

$w_m := 1$

Given

$$V_p = \frac{\pi \cdot \left(d \cdot 10^{-3}\right)^2}{4} \cdot w_m$$

$w_m := \mathrm{Find}(w_m)$ $\quad w_m = 5.197$ in [m/s]

2. Schritt: Berechnen der Reynoldszahl

$Re := \mathrm{Reynold}\left(w_m, d, tonne, 0.37 \cdot 10^{-6}\right)$ $\quad Re = 9.832 \times 10^6$

3. Schritt: Ermitteln von λ

$\lambda := \mathrm{lambda}(Re, k, d)$ $\quad \lambda = -2$ d.h. Wir sind im Übergangsgebiet => **Zusatz 2 verwenden**

Given

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log\left(\frac{2.51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{k}{d} \cdot 0.269\right)$$

$\lambda := \mathrm{Find}(\lambda)$ $\quad \lambda = 0.011$

4. Schritt: Berechnen des Druckverlustes

$$\Delta p_V := \lambda \cdot \frac{L}{d \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot {w_m}^2 \cdot 10^{-5}$$

$\Delta p_V = 2.198$ in [bar]

Der Druckverlust beträgt 2.198 bar.

Anhang 1: Einige Rauhigkeitswerte für verwschiedene Rohrwerkstoffe

Rohrwerkstoff:	**Zustand der Rohrwand**	**Rauhigkeit k in [mm]**
gezogene Rohre aus Metallen (Kupfer, Messing, Bronze, Leichtmetall), Kunststoffen, Glas oder Plexiglas	neu, technisch glatt	0.0013 bis 0.0015
Gummidruckschlauch	neu, nicht versprödet	0.0016
nahtlose Stahlrohre	Walzhaut gebeizt neu verzinkt	0.02 bis 0.06 0.03 bis 0.04 0.07 bis 0.16
längsgeschweißte Stahlrohre	Walzhaut bitumiert neu galvanisiert	0.04 bis 0.1 0.01 bis 0.05 0.008
Stahlrohre nach längeren Benützung	mäßig verrostet bzw. leicht verkrustet stark verkrustet	0.15 bis 0.2 bis 3
gußeiserne Rohre	neu mit Gußhaut neu bitumiert leicht angerostet verkrustet	0.2 bis 0.6 0.1 bis 0.13 0.5 bis 1.5 bis 3
Betonrohre	neu mit Glattstrich neu, geglätteter Stahlbeton neu, Schleuderbeton unverputzt	0.3 bis0.8 0.1 bis 0.15 0.2 bis 0.8