Mag. Ernst Geretschläger Ernst.Geretschlaeger@htl-steyr.ac.at

Raketenstart

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Differentialgleichungen, numerische Verfahren, lineare Funktion, Exponentiafunktion.

- Kurzzusammenfassung

  Raketenstart von der Erde unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes. Anhand von 2 Modellen wird der Einfluss der Luft auf den Bewegungsvorgang numerisch simuliert.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik, Physik, Mechanik

- Mathcad-Version:

  Mathcad 2001

- Anmerkungen bzw. Sonstiges:

  Das Beispiel diente im 4. Jahrgang als Einstieg in Mathcad.

Raketenstart

Eine Rakete startet lotrecht nach oben von der Erde. Man stelle die Auswirkung des Luftwiderstandes (kein Luftwiderstand, linear abnehmender Luftwiderstand, exponentiell abnehmender Luftwiderstand) gegenüber. Die Erdbeschleunigung sei konstant.

$g := 9.81$ Konstante Erdbeschleunigung $m_0 := 9000$ Startmasse in kg

$F_S := 120000$ Schubkraft in N $dm := 50$ Masseverlust in kg/s

$y(0) = 0$ Anfangsauslenkung $y'(0) = 0$ Anfangsgeschwindigkeit

Ohne Luftwiderstand

$$\left(m_0 - dm \cdot t\right) \cdot \frac{d^2}{dt^2} s = F_S - \left(m_0 - dm \cdot t\right) \cdot g$$ Differentialgleichung

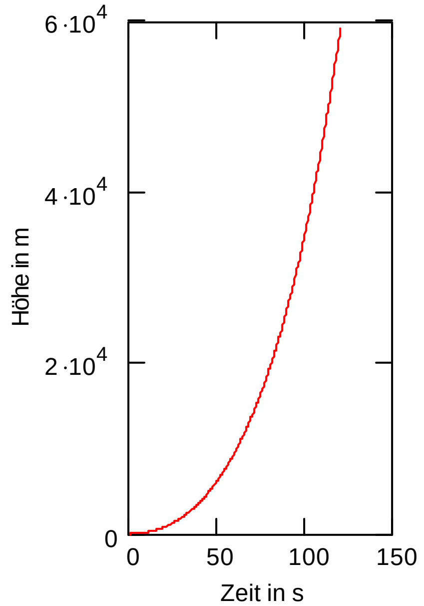
$$Y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ Anfangsauslenkung / Anfangsgeschwindigkeit

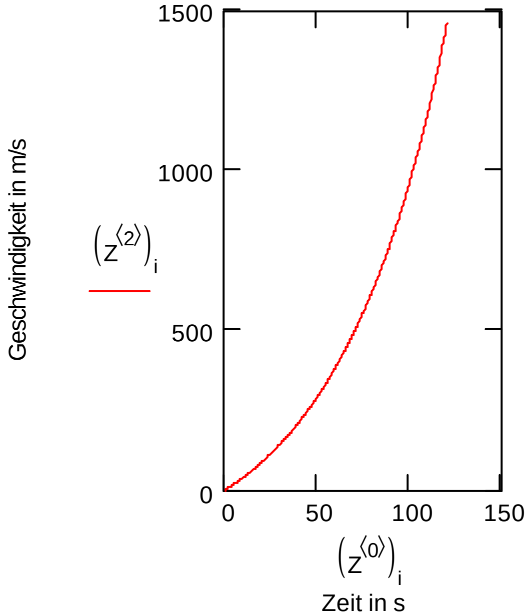
$$D(t, Y) := \begin{pmatrix} Y_1 \\ \dfrac{F_S}{m_0 - dm \cdot t} - g \end{pmatrix}$$

Y_1 entspricht der Geschwindigkeit und Y_0 dem Weg (der Höhe)

$N := 400 \quad t_a := 0 \quad t_e := 120$ Brennschluss nach 120 Sekunden

$Z := \text{rkfest}(Y, t_a, t_e, N, D) \qquad i := 0..N$





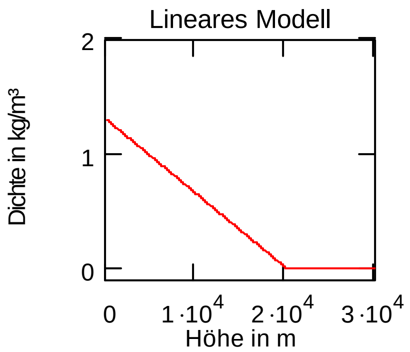
$Z_{N,1} = 5.917 \times 10^4$

Mit Berücksichtigung des Luftwiderstandes (lineares Modell)

Der Luftwiderstand wachse quadratisch mit der Geschwindigkeit. Die Luftdichte nehme linear von 1.3 kg/m³ auf Meereshöhe auf 0 kg/m³ in 20 km Höhe ab

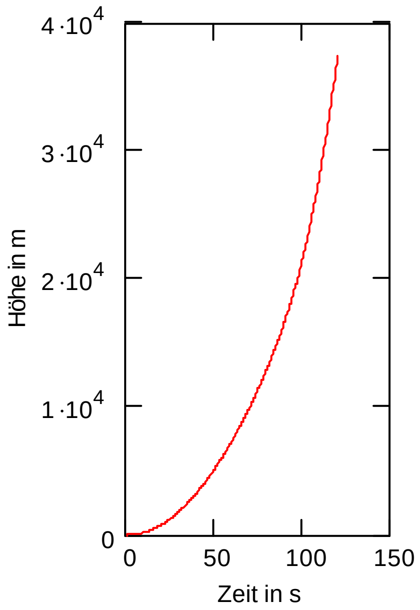
$$(m_0 - dm \cdot t) \cdot \frac{d^2}{dt^2}s = F_S - (m_0 - dm \cdot t) \cdot g - c_W \cdot A \cdot \rho \cdot \frac{v^2}{2} \qquad c_W \cdot \frac{A}{2} = 0.8$$

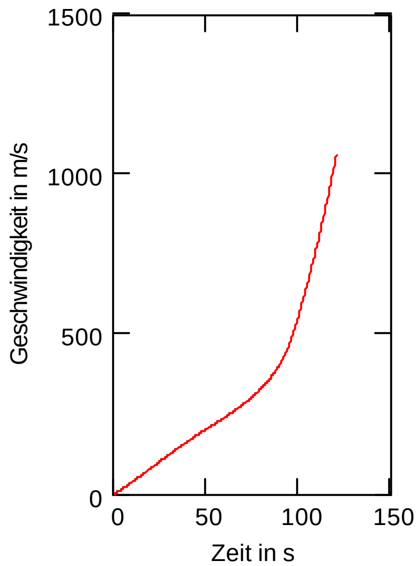
$$\rho(y) := \text{wenn}\left[y < 20000, 1.3 \cdot \left(1 - \frac{y}{20000}\right), 0\right]$$



$$D(t1, Y) := \begin{bmatrix} Y_1 \\ \dfrac{F_S - 0.8 \cdot \rho(Y_0) \cdot (Y_1)^2}{m_0 - dm \cdot t1} - g \end{bmatrix}$$

$Zlin := rkfest(Y, t_a, t_e, N, D)$





$Zlin_{N,1} = 3.747 \times 10^4$

$Zlin_{N,2} = 1.062 \times 10^3$

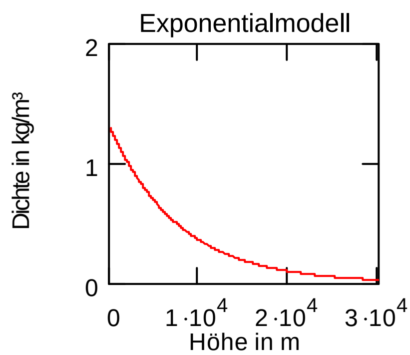
Mit Berücksichtigung des Luftwiderstandes (exponentielles Modell)

Die Luftdichte nehme nun exponentiell ab: $\rho(y) := 1.3 \cdot e^{-0.00013 \cdot y}$

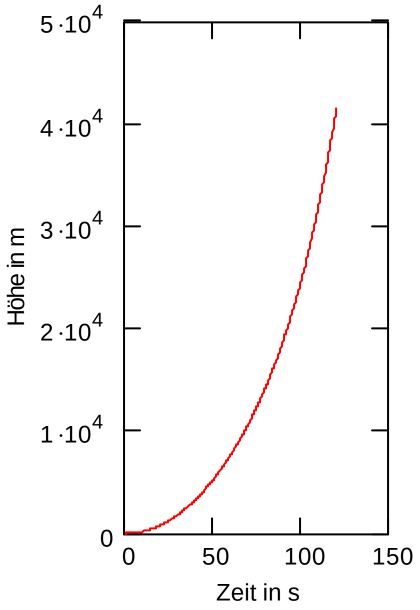
$$(m_0 - dm \cdot t) \cdot \frac{d^2}{dt^2} s = F_S - (m_0 - dm \cdot t) \cdot g - c_W \cdot A \cdot \rho \cdot \frac{v^2}{2}$$

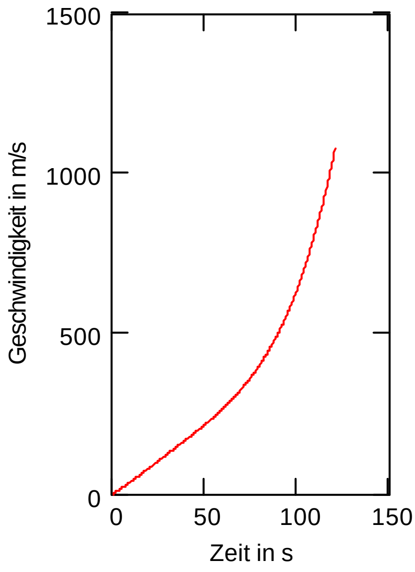
$$c_W \cdot \frac{A}{2} = 0.8$$

$$D(t2, Y) := \begin{bmatrix} Y_1 \\ \dfrac{F_S - 0.8 \cdot \rho(Y_0) \cdot (Y_1)^2}{m_0 - dm \cdot t2} - g \end{bmatrix}$$



$Zexp := rkfest(Y, t_a, t_e, N, D)$

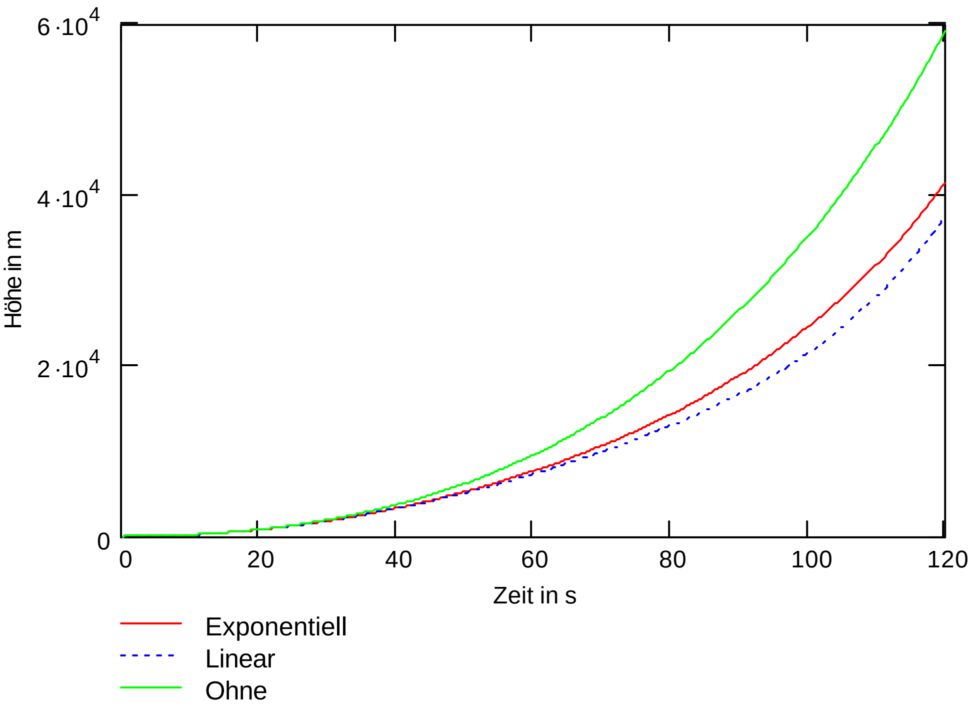


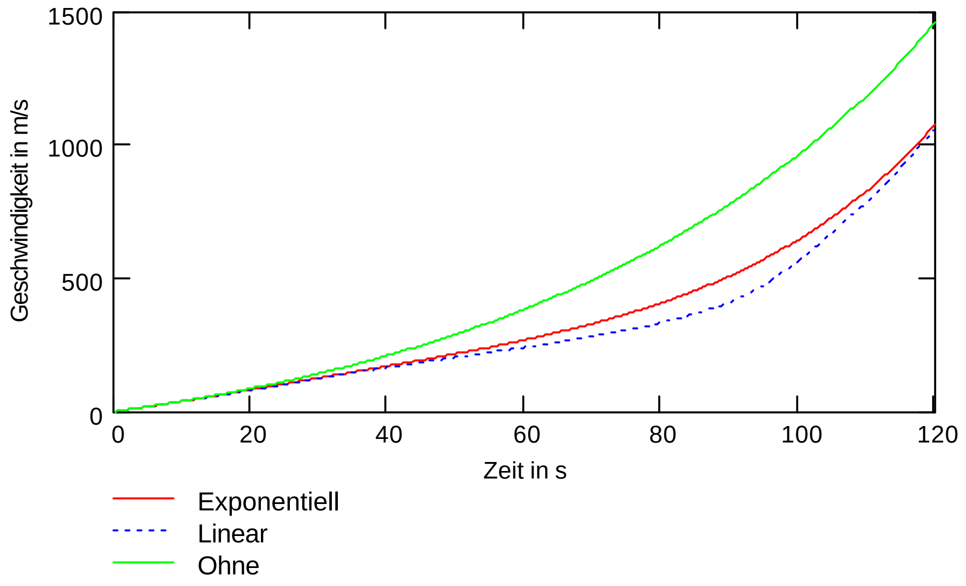


$Zexp_{N,1} = 4.144 \times 10^4$

$Zexp_{N,2} = 1.077 \times 10^3$

Alle 3 im Vergleich:





Hinweis: Das Beispiel diente im 4. Jahrgang als Einstieg in Mathcad. Es wurde der erste Teil (ohne Luftwiderstand) den Schülern zur Verfügung gestellt. Sie sollten, nach eingehender Besprechung, die Annahmen realistischer gestalten. Das größte Problem bereitete das lineare Modell mit der stückweise definierten Funktion.
Eine etwaige Ausweitung auf abnehmende Erdbeschleunigung oder Einschwenken in eine Umlaufbahn lässt weitere interessante Fragestellungen zu.