Mag. Ernst Geretschläger Ernst.Geretschlaeger@htl-steyr.ac.at

Vierecksmechanismus - Parameterkurven

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Parameterdarstellung, analytische Geometrie - Kreisdarstellung, Schnitt von Kreisen, Vektorrechnung.

- Kurzzusammenfassung

  Behandlung eines Gelenkvierecks.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

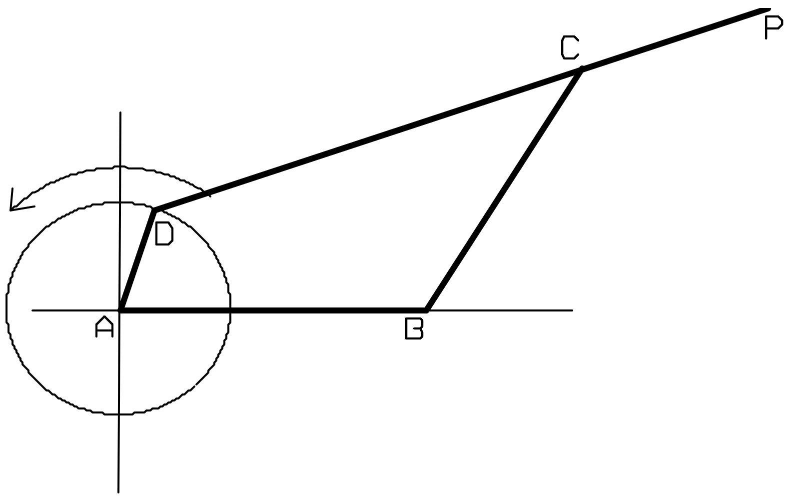
  Angewandte Mathematik, Mechanik

- Mathcad-Version:

  Mathcad 2000

Vierecksmechanismus - Parameterkurven

Wird D auf einem Kreis mit Radius rA um A herumgeführt, so beschreibt C einen Kreisbogen mit Mittelpunkt D, während P eine komplizierte Kurve durchläuft. Anhand eines Kartonstreifenmodells kann man sich den Sachverhalt punktweise klar machen. Auch ein LEGO-Modell hilft. Variiert man die Abmessungen, so erhält man zum Beispiel den Wippkran. Viele Anregungen findet man in "Was hat der Bagger mit Mathematik zu tun?" von Brian Bolt (erschienen im KLETT Verlag).



A(0/0); B(xB/yB); AD = rA; BC = rB; ***DP*** =L.***DC*** mit DC = rD.
Hinweis: ***DP*** ist ein Vektor (fett und kursiv)!

$t := 0, 0.15 .. 6.4$

$xD(t) := rA \cdot \cos(t) \qquad yD(t) := rA \cdot \sin(t)$ Kreis um A (= Ursprung)

Geradengleichung für CD wird über den Schnitt des Kreises k3(D,rD) mit dem Kreis k2(B,rB) ermittelt.

k3: $(x - xD)^2 + (y - yD)^2 = rD^2$

k2: $(x - xB)^2 + (y - yB)^2 = rB^2$

Symbolik Vereinfachen

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot xD + xD^2 + y^2 - 2 \cdot y \cdot yD + yD^2 = rD^2$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot xB + xB^2 + y^2 - 2 \cdot y \cdot yB + yB^2 = rB^2$$

Subtraktion der beiden Gleichungen unter Berücksichtigung von $xD^2 + yD^2 = rA^2$ führt auf eine lineare Gleichung in x und y. Diese wird auf y = k.x+d umgeformt.

$$-2 \cdot x \cdot xD + rA^2 - 2 \cdot y \cdot yD + 2 \cdot x \cdot xB - xB^2 + 2 \cdot y \cdot yB - yB^2 = rD^2 - rB^2$$

Linke Seite aufgelöst nach y (Cursor auf y stellen und Symbolik Variable Auflösen wählen)

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(2 \cdot x \cdot xD - rA^2 + yB^2 - 2 \cdot x \cdot xB + xB^2 + rD^2 - rB^2\right)}{(yB - yD)}$$

Reihenentwicklung nach x (Cursor auf x stellen und Symbolik Variable Reihenentwicklung... wählen)

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(xB^2 - rA^2 + yB^2 + rD^2 - rB^2\right)}{(yB - yD)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(-2 \cdot xB + 2 \cdot xD)}{(yB - yD)} \cdot x$$

Definition der Steigung k und des Ordinatenabschnitts d.

$$d(t) := \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(xB^2 - rA^2 + yB^2 + rD^2 - rB^2\right)}{(yB - yD(t))} \qquad k(t) := \frac{(-xB + xD(t))}{(yB - yD(t))}$$

Schnitt dieser Geraden y = k.x + d mit dem Kreis k3 führt auf eine quadratische Gleichung:

$$(x - xD)^2 + (k \cdot x + d - yD)^2 - rD^2 = 0$$

Reihenentwicklung der linken Seite $(x - xD)^2 + (k \cdot x + d - yD)^2 - rD^2$ nach x (Cursor auf x stellen, Symbolik Variable Reihenentwicklung... wählen):

$$xD^2 - rD^2 + (d - yD)^2 + [-2 \cdot xD + 2 \cdot (d - yD) \cdot k] \cdot x + \left(k^2 + 1\right) \cdot x^2$$

und den üblichen Abkürzungen für die Koeffizienten in der quadratischen Gleichung $a.x^2 + b.x + c = 0$:

$$a(t) := 1 + k(t)^2 \qquad b(t) := 2 \cdot k(t) \cdot (d(t) - yD(t)) - 2 \cdot xD(t) \qquad c(t) := (d(t) - yD(t))^2 - rD^2 + xD(t)^2$$

ergibt schließlich als Schnittpunktkoordinaten auf k2 unter Berücksichtigung der beiden Lösungsfälle:

$$xC(t) := \text{wenn}\left(yD(t) - yB \geq 0, \frac{-b(t) + \sqrt{b(t)^2 - 4 \cdot a(t) \cdot c(t)}}{2 \cdot a(t)}, \frac{-b(t) - \sqrt{b(t)^2 - 4 \cdot a(t) \cdot c(t)}}{2 \cdot a(t)} \right)$$

$$yC(t) := k(t) \cdot xC(t) + d(t)$$

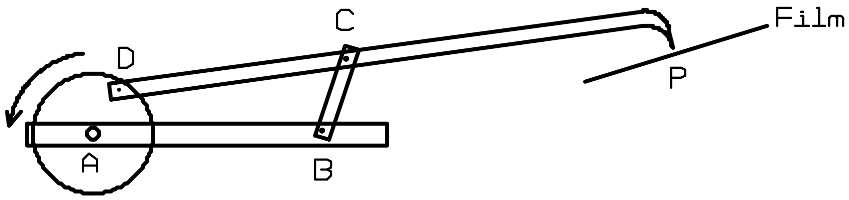
Die Gleichungen für die Koordinaten von P ergeben sich aus der Vektorrechnung:

$$\mathbf{AP} = \mathbf{AD} + L.\mathbf{DC} = \begin{pmatrix} xD(t) \\ yD(t) \end{pmatrix} + L \cdot \begin{pmatrix} xC(t) - xD(t) \\ yC(t) - yD(t) \end{pmatrix}$$

$$xP(t) := (1 - L) \cdot xD(t) + L \cdot xC(t) \qquad yP(t) := (1 - L) \cdot yD(t) + L \cdot yC(t)$$

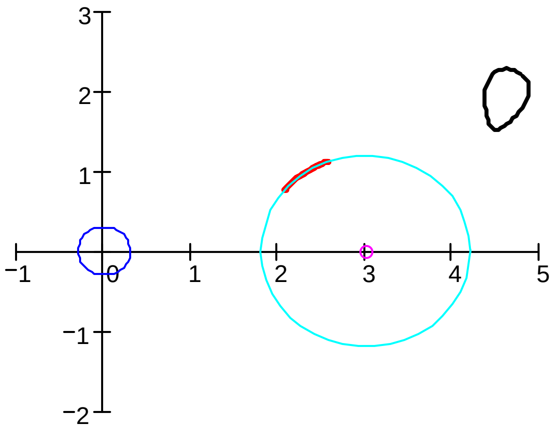
Beispiel: Filmtransportmechanismus

A(0/0), rA = 0.3, B(3/0), rB = 1.2, rD = 2.5, L = 2



$rA \equiv 0.3 \qquad rB \equiv 1.2 \qquad rD \equiv 2.5$

$xB \equiv 3 \qquad yB \equiv 0 \qquad L \equiv 2$



Anhand veränderter Parameter können vielfältige Objekte studiert werden. Z. B.:
Wippkran (Hafenkran): Bewegung beim Ausschwenken soll horizontal verlaufen. Man setze dazu rA = 8, rB = 7.6, rD = 1.4, xB = 2, yB = 2 und L = -3.