

Peter Fischer

pe.fischer@atn.nu

Die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung von Gasen



- **Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:**
Exponentialfunktion, Wahrscheinlichkeitsdichte (-funktion), Verteilungsfunktion, Kurvenuntersuchung; Gauss'sche Normalverteilungsfunktion
- **Kurzzusammenfassung**
Untersuchung der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung; Einfluss der Masse und der Temperatur auf die Verteilung und insbesondere die Lage des Maximums. Es wird der relative Anteil jener Gasmoleküle berechnet, welche eine Geschwindigkeit innerhalb eines bestimmten Intervalls besitzen. Die Dichtefunktion wird mit der Gauss'schen Normalverteilungsfunktion verglichen.
- **Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):**
Angewandte Mathematik und Angewandte Physik, alle Abteilungen, 3. Jahrgang
- **Mathcad-Version:**
Mathcad 2001



Inhaltsübersicht

- Die Maxwell'sche (Maxwell-Boltzmann'sche) Geschwindigkeitsverteilung von Gasen
- Wie hängt die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung von den Parametern m und T ab?
- Für welche Geschwindigkeit ist die Verteilungsfunktion maximal?
- Welcher relative Anteil von Gasmolekülen befindet sich in einem bestimmten Geschwindigkeitsintervall?

Die Maxwell'sche (Maxwell-Boltzmann'sche) Geschwindigkeitsverteilung von Gasen

Wir sind auf der Erdoberfläche ständig von mehr oder weniger Gasteilchen umgeben, nehmen diese aber wegen ihrer geringen Masse - falls sie nicht gerade durch ihren Duft, ihre Temperatur oder ihre Feuchtigkeit auf sich aufmerksam machen - im Allgemeinen kaum bewußt wahr. Gehen allerdings Wassermoleküle vom flüssigen in den gasförmigen Zustand über, so ist dies allen ein aus dem (Koch-) Alltag vertrautes Bild, welches schon vermuten läßt, dass Gase eine bestimmte Geschwindigkeitsverteilung besitzen.

Auf Grund der Bedeutung der Wärmelehre für unseren Alltag sei ganz kurz Einiges zusammengestellt, was zum Verständnis der Bedeutung der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung beitragen soll.

Wärme(energie) ist die kinetische Energie (Bewegungsenergie) der ungeordneten Molekülbewegung. Da sich die kinetische Energie als $E_{\text{kin}} = mv^2/2$ ergibt, wird klar, dass die Geschwindigkeit v der Moleküle von fundamentaler Bedeutung ist.

Die (absolute) Temperatur T ist somit nur ein Maß für die mittlere kinetische Energie $W_{\text{mittel}} = mv_{\text{mittel}}^2/2$ der Moleküle. Wenn man nur Translationsenergie betrachtet, ergibt sich: $W_{\text{mittel, trans}} = mv_{\text{mittel}}^2/2 = 3kT/2$.

Dies ist die allgemeinste und vollständigste Definition der absoluten Temperatur in Kelvin, wobei m die Masse, v_{mittel}^2 die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit der Moleküle und die Konstante k die Boltzmann-Konstante ist.

Formt man diese Definitionsgleichung nach T um, also $T = mv_{\text{mittel}}^2/3k$, so folgt zunächst, dass es einen absoluten Temperatur-Nullpunkt gibt, da der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung (als Produkt positiver Größen) stets größer oder gleich Null ist.

Formt man die Definitionsgleichung nach v_{mittel}^2 um, so erhält man für Ausströmvorgänge ins Vakuum (beispielsweise in der Raketen- und Turbinentechnik) als Wurzel dieses quadratischen Mittelwertes die thermische Geschwindigkeit als $v_{\text{th}} = (3kT/m)^{1/2}$.

Wenn man die Zusammensetzung eines Gases kennt und die relative Molekülmasse μ ($m = \mu m_{\text{H}}$ mit m_{H} = Masse des H-Atoms) angeben kann, folgt somit für die thermische Geschwindigkeit $v_{\text{th}} = (3kT/\mu m_{\text{H}})^{1/2}$.

Für Luft (mittleres $\mu = 29$) folgt bei 20° C eine Molekülgeschwindigkeit von rund 500 m/s. Das soll sogleich überprüft werden.

Auf die Angabe von Einheiten wird - abgesehen von den Kommentaren - verzichtet, da stets die SI-Grundeinheiten (m, kg, s, K und mol) verwendet werden. Der Vollständigkeit halber sei angeführt, dass mit den beiden Einheiten Ampere (A) und Candela (cd) das System der sieben SI-Grundeinheiten bereits komplett ist.

$T := 293.15$ Die Temperatur betrage 293,15 Kelvin, also 20 Grad Celsius.

$k := 1.3807 \cdot 10^{-23}$ Die Boltzmannkonstante in Joule pro Kelvin.

$m := 1.67 \cdot 10^{-27}$ Die Masse eines Wasserstoffatoms in Kilogramm.

$\mu := 29$ Die relative Molekülmasse von Luft beträgt wegen der etwa 80% Stickstoff N_2 und der 20 % Sauerstoff O_2 rund 29.

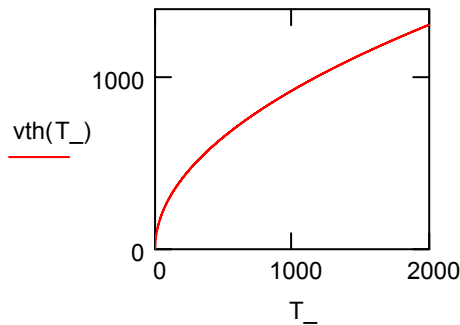
$$v_{\text{th}} := \sqrt{\frac{3k \cdot T}{\mu \cdot m}}$$

$v_{\text{th}} = 500.724$ Die versprochenen 500 m/s werden geliefert.

Auch der graphische Verlauf der Ausströmgeschwindigkeit in Vakuum als Funktion der absoluten Temperatur in Kelvin verdient eine gesonderte Beschreibung.

$T_ := 0, 0.1 .. 2000$

$$v_{th}(T) := \sqrt{\frac{3k \cdot T}{\mu \cdot m}}$$

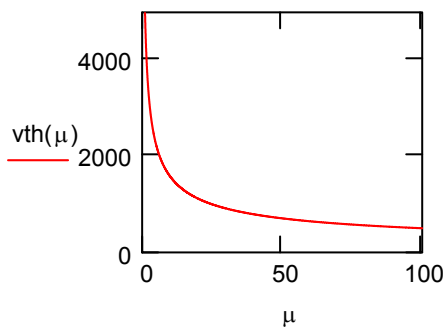


Schön erkennt man den Anstieg der Wurzelfunktion; Da in der Raketentechnik die Temperatur allerdings nach oben durch den Schmelzpunkt des Wandmaterials beschränkt ist, ergibt sich die Forderung nach möglichst leichten Gasen, wie der nachstehende Graph belegt.

Die Ausströmgeschwindigkeit ins Vakuum bei konstanter Temperatur als Funktion der relativen Masse μ .

$$\mu := 1, 1.01 \dots 100 \quad T := 1000$$

$$v_{th}(\mu) := \sqrt{\frac{3k \cdot T}{\mu \cdot m}}$$



Man erkennt die Bedeutung von leichten Gasen, um hohe Ausströmgeschwindigkeiten zu erreichen. Die leichtesten Produkte einer normalen chemischen Reaktion sind HF und H₂O, weshalb beispielsweise der "Space Shuttle" mit Knallgas betrieben wird.

Die gesamte Herleitung der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung würde zu umfangreich ausfallen. Ich darf auf das Lehrbuch von Gerthsen und Vogel Physik (17. Auflage) hinweisen, wo man ab Seite 207 eine Ableitung findet. Dabei geht man von der bekannten barometrischen Höhenformel aus; man betrachtet ein Mol und rechnet mittels der Zustandsgleichung auf molekulare Größen um. Da die Teilchendichte n bei konstanter Temperatur zum Druck proportional ist, kann man auch die barometrische Höhenformel für die Teilchendichte anschreiben.

$$p_0 := 1.013 \quad h := 1 \quad \rho_0 := 1$$

Diese Größen müssen definiert werden, um die barometrische Höhenformel angeben zu können.

$$p(h) := p_0 e^{\frac{-\rho_0 \cdot g \cdot h}{p_0}}$$

$$p_0 \cdot V_0 = R \cdot T = N_A \cdot k \cdot T$$

Die Zustandsgleichung für ein Mol eines idealen Gases.

$$n_0 := 1$$

$$n(T) := n_0 e^{\frac{-m \cdot g \cdot h}{k \cdot T}}$$

Die Teilchenzahldichte in Abhängigkeit von der absoluten Temperatur.

Ersetzt man den Druck p_0 im Nenner des Exponenten der barometrischen Höhenformel, so ergibt sich im Exponenten bereits der Ausdruck mgh - also die potentielle Energie. Da in einem idealen Gas ein Molekül nur die kinetische Energie $mv^2/2$ besitzt, ergibt sich für die Maxwell-Boltzmann'sche Verteilung folgender Ausdruck.

$$f(v) \cdot dv = C \cdot e^{\frac{-mv^2}{2kT}} \cdot dv$$

In dieser Form besagt die Verteilung, dass man bei höheren Energien exponentiell weniger Moleküle antrifft. In der Größe C steckt noch das statistische Gewicht der einzelnen v-Intervalle. Bedenkt man nun noch, dass das Intervall $[v, v + dv]$ des Geschwindigkeitsbetrages durch eine Kugelschale vom Volumen $4\pi v^2 dv$ repräsentiert wird, so erhält man die nachfolgende Gleichung.

$$f(v) \cdot dv = c \cdot 4\pi \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot dv$$

Die Konstante c ergibt sich aus der Normierungsbedingung, das heisst, dass das uneigentliche Integral über die Verteilungsfunktion von Null bis Unendlich Eins ergeben muss, da jedes Teilchen irgendeinen Wert dazwischen mit Gewißheit annimmt. Damit erhält man für die Verteilungsfunktion folgenden Ausdruck.

$$f(m, v, T) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left(\frac{m}{k \cdot T}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

Die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung ist eine Funktion der Geschwindigkeit v mit den Parametern m und T und das bestimmte Integral zwischen den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 gibt an, welcher relative Anteil der betrachteten Gasmoleküle gerade eine Geschwindigkeit zwischen diesen beiden Grenzen besitzt.

T := 300

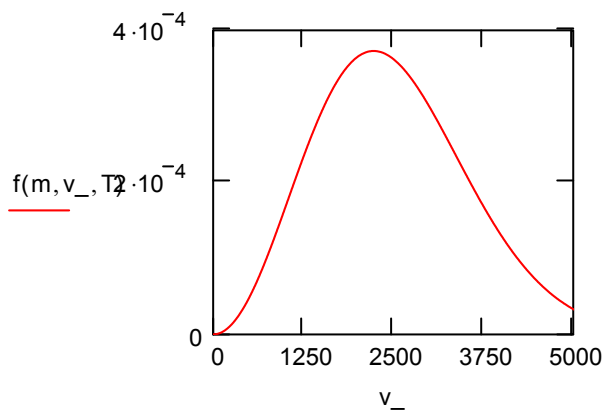
Die Temperatur betrage 300 Kelvin, also rund 26,85 Grad Celsius.

v_ := 0, 10 .. 7500

Um im Folgenden Gleichungen nach der Variablen v symbolisch auflösen zu können, wird die Laufvariable v_ gewählt, da Mathcad 2001 diese damit als Vektor identifiziert.

Die oben zitierte Normiertheit der Geschwindigkeitsverteilung, welche der Fläche von einer Einheit zwischen der Kurve und der Abszisse entspricht, kann durch das folgende uneigentliche Integral nachgewiesen werden.

$$\int_0^{\infty} f(m, v, T) dv = 1.000$$



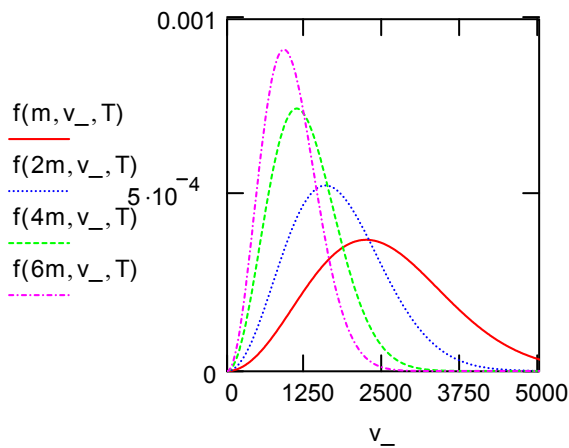
Die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung zeigt für die gewählten Parameter, also ein ideales Gas mit der Molekülmasse von H-Atomen bei Raumtemperatur ein gut ausgeprägtes Maximum bei rund 2200 m/s und einen abfallenden Anteil für hochenergetische Gasteilchen.

Im Folgenden soll die Maxwellverteilung etwas eingehender auf die Bedeutung ihrer Parameter untersucht werden.

[Zurück zur Inhaltsübersicht](#)

1. Wie hängt die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung von den Parametern m und T ab?

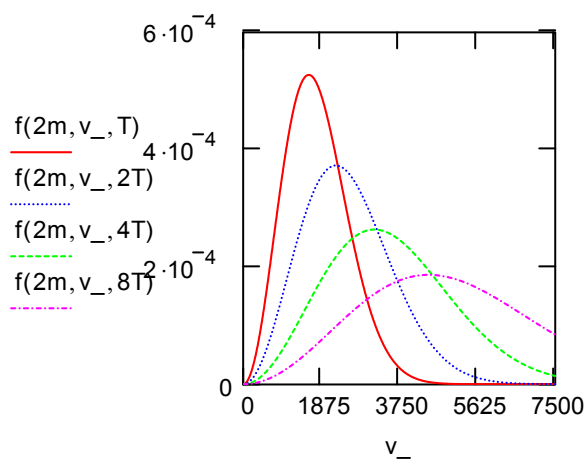
Wir halten zuerst die Temperatur (bei 300 Kelvin) konstant und variieren die Masse der betrachteten Gasmoleküle.



Der nebenstehende Graph zeigt die Geschwindigkeitsverteilung für Gasmoleküle von 4 verschiedenen Arten, wobei die Masse der jeweiligen Gasmoleküle das Doppelte, Vierfache bzw. Sechsfache der Masse der ersten Gassorte betrage.

Klar erkennt man, dass schwerere Gasteilchen bei gleicher Temperatur eine wesentlich geringere häufigste Geschwindigkeit besitzen, welche auch entsprechend "schärfer" ausgeprägt ist, das heißt, dass die Verteilung schmaler ist als bei geringerer Masse, was sich auch auf Grund der Normiertheit der Verteilungsfunktion ergibt.

Nun soll die Masse konstant gehalten werden und entsprechend die Temperatur variiert werden.



Der nebenstehende Graph zeigt die Geschwindigkeitsverteilung für Gasmoleküle eines bestimmten Gases bei 4 verschiedenen Temperaturen, welche jeweils verdoppelt wurde. Klar erkennt man, dass identische Gasteilchen bei höherer Temperatur eine wesentlich größere häufigste Geschwindigkeit besitzen und dass die Verteilung entsprechend breiter wird, was sich auch auf Grund der Normiertheit der Verteilungsfunktion ergibt.

[Zurück zur Inhaltsübersicht](#)

2. Für welche Geschwindigkeit ist die Verteilungsfunktion maximal?

Die Lösung erfolgt über die erste Ableitungsfunktion; Aus dem Graph folgt bereits die Existenz einer waagrechten Tangente an die Verteilungsfunktion für endliche Geschwindigkeiten.

$$\frac{d}{dv} f(m, v, T) = 0 \text{ auflösen, } v \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -2227.2401761810982519 \\ 2227.2401761810982519 \end{pmatrix}$$

Da nur positive Geschwindigkeiten in der Praxis von Bedeutung sind, erhalten wir rund 2227 m/s als häufigste Geschwindigkeit.

$$\frac{d}{dv} f(2m, v, T) = 0 \text{ auflösen, } v \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1574.8966319087753990 \\ 1574.8966319087753990 \end{pmatrix}$$

Das Maximum dieser Geschwindigkeitsverteilung liegt bei rund 1575 m/s.

$$\frac{d}{dv}f(4m, v, T) = 0 \text{ auflösen, } v \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1113.6200880905491259 \\ 1113.6200880905491259 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Das Maximum dieser} \\ \text{Geschwindigkeitsverteilung liegt bei rund} \\ 1114 \text{ m/s.} \end{array}$$

$$\frac{d}{dv}f(6m, v, T) = 0 \text{ auflösen, } v \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -909.26699437836643793 \\ 909.26699437836643793 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Das Maximum dieser} \\ \text{Geschwindigkeitsverteilung liegt bei rund} \\ 909 \text{ m/s.} \end{array}$$

$$\frac{d}{dv}f(2m, v, 2T) = 0 \text{ auflösen, } v \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -2227.2401761810982519 \\ 2227.2401761810982519 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Das Maximum dieser} \\ \text{Geschwindigkeitsverteilung liegt bei rund} \\ 2227 \text{ m/s und stimmt mit dem ersten überein,} \\ \text{da die Parameter } m \text{ und } T \text{ jeweils als} \\ \text{Quotient auftreten.} \end{array}$$

$$\frac{d}{dv}f(2m, v, 4T) = 0 \text{ auflösen, } v \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -3149.7932638175507980 \\ 3149.7932638175507980 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Das Maximum dieser} \\ \text{Geschwindigkeitsverteilung liegt bei rund} \\ 3150 \text{ m/s.} \end{array}$$

$$\frac{d}{dv}f(2m, v, 8T) = 0 \text{ auflösen, } v \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -4454.4803523621965037 \\ 4454.4803523621965037 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Das Maximum dieser} \\ \text{Geschwindigkeitsverteilung liegt bei rund} \\ 4454 \text{ m/s.} \end{array}$$

[Zurück zur Inhaltsübersicht](#)

3. Welcher relative Anteil von Gasmolekülen befindet sich in einem bestimmten Geschwindigkeitsintervall?

Diese Frage läßt sich sehr elegant mit Hilfe der Integralrechnung beantworten und liefert eine wunderbare Ergänzung oder sogar Motivation für die Berechnungen mittels kontinuierlicher Verteilungsfunktionen wie beispielsweise der Normalverteilungsfunktion.

Einigen SchülerInnen wird sicherlich schon der konstante Wurzelfaktor aus $1/\pi$ aufgefallen sein, der auch bei der Normalverteilungsfunktion als Normierungskonstante auftritt.

$$v_0 := 4000$$

Eine obere Geschwindigkeitsgrenze v_0 wird definiert, um das bestimmte Integral allgemein anschreiben zu können.

$$r(v_0) := \int_0^{v_0} f(m, v, T) dv$$

Die Funktion r gibt den relativen Anteil jener Gasmoleküle an, welche eine Geschwindigkeit zwischen 0 und v_0 Meter pro Sekunde besitzen.

Zuerst sollen einige ausgesuchte Zahlenwerte angegeben werden, bevor die Funktion r selbst neben der zugehörigen Geschwindigkeitsverteilung graphisch dargestellt wird.

$$r\left(\frac{v_0}{4}\right) = 0.060$$

$$r(v_0) = 0.908$$

$$r\left(\frac{v_0}{2}\right) = 0.343$$

$$r\left(\frac{5 \cdot v_0}{4}\right) = 0.982$$

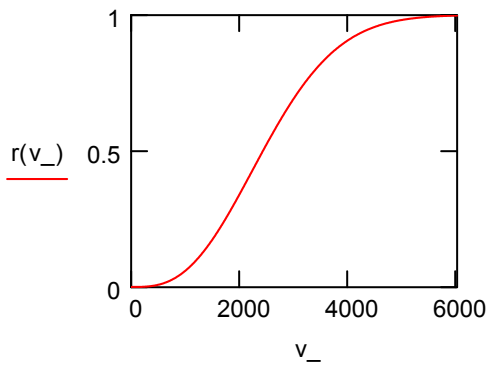
$$r\left(\frac{3 \cdot v_0}{4}\right) = 0.696$$

$$r\left(\frac{3 \cdot v_0}{2}\right) = 0.998$$

Man erkennt, dass bei $T = 300$ Kelvin und der Masse von Wasserstoffatomen 6 % der Gasmoleküle Geschwindigkeiten zwischen 0 und 1000 m/s besitzen. Bis 2000 m/s sind es bereits 34,3 %; Bis 3000 m/s bereits 69,6 % und bei 4000 m/s über 90 Prozent.

Eine Geschwindigkeit über 6000 m/s besitzen nur rund 2 Promille der Gasmoleküle, wie das letzte Ergebnis zeigt.

Der relative Anteil nimmt also rasant zu und strebt (definitionsgemäß) gegen 1.



Sehr gut erkennt man den typischen S-förmigen Verlauf einer **Verteilungsfunktion**, welche angibt, wieviel Prozent der Gasmoleküle **höchstens** die Geschwindigkeit v besitzen.

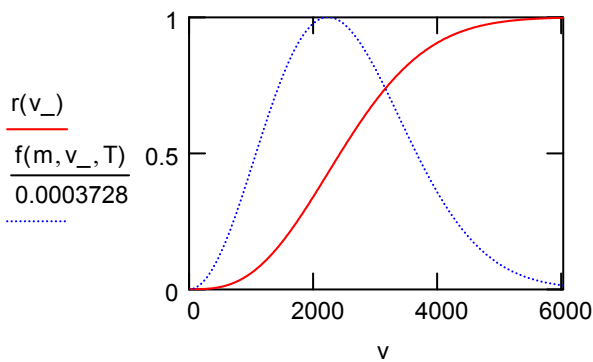
Zur Begriffsunterscheidung sei darauf hingewiesen, dass die Funktion $f(v,m,T)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und $r(v)$ eine Verteilungsfunktion im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung darstellen. Unter den Physikern ist es aber üblich, bei $f(v,m,T)$ bereits von der Verteilungsfunktion zu sprechen.

Möchte man die Dichtefunktion und ihre Verteilungsfunktion **gemeinsam** darstellen, so empfiehlt sich zuerst eine Normierung der Dichtefunktion durch den Funktionswert an der Stelle der häufigsten Geschwindigkeit. Das soll im Folgenden gezeigt werden.

$$\frac{d}{dv}f(m, v, T) = 0 \text{ auflösen, } v \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -2227.2401761810982519 \\ 2227.2401761810982519 \end{pmatrix}$$

$$f(m, 2227.24, T) = 0.0003728$$

Ein gutes Beispiel für die Wahl der angezeigten Dezimalstellen. In der Standardeinstellung werden nur 3 Dezimalstellen angezeigt, so dass sich 0.000 ergeben würde.



Hier sind also die normierte Dichtefunktion und die Verteilungsfunktion - also die aufintegrierte Dichtefunktion - gemeinsam dargestellt. Interessant sind die Prozentanteile bei Vielfachen der häufigsten Geschwindigkeit. Das wird im Folgenden berechnet.

$$v_h := 2227.24$$

$$r\left(\frac{v_h}{4}\right) = 0.011 \quad r(v_h) = 0.428$$

$$r\left(\frac{v_h}{2}\right) = 0.081 \quad r\left(\frac{5v_h}{4}\right) = 0.627$$

$$r\left(\frac{3v_h}{4}\right) = 0.229 \quad r\left(\frac{3v_h}{2}\right) = 0.788$$

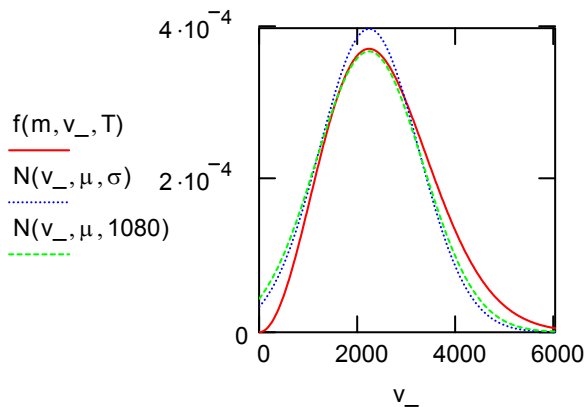
Man erkennt bereits hier den Unterschied zu einer **symmetrischen** Dichte- bzw. Verteilungsfunktion, bei der beim Maximum der Wert der Verteilungsfunktion natürlich 0,5 sein muss, wie man es bei der Normalverteilungsfunktion gewöhnt ist. Auf Grund der Symmetrie genügt es, die Normalverteilungsfunktion nur für positive Werte zu tabellieren.

Interessant ist es nun, die asymmetrische Dichtefunktion von Maxwell und Boltzmann mit der symmetrischen Dichtefunktion der Normalverteilung mit den Parametern μ und σ zu vergleichen. Dabei ist μ durch die häufigste Geschwindigkeit v_h fixiert. Für σ steht der Kreativität der SchülerInnen vorerst nichts im Wege.

$$\mu := 2227.24$$

$$\sigma := 1000$$

$$N(v, \mu, \sigma) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} \cdot e^{-\frac{(v-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$



Man erkennt, dass sich die Normalverteilung für $\mu = 2227,24$ und $\sigma = 1080$ um das Maximum (für dieses haben wir uns durch μ entschieden) bereits sehr gut an die Maxwell-Boltzmann-Verteilung anschmiegt. Natürlich können die Ungleichheiten wegen der Asymmetrie nie ganz ausgeglichen werden und der steilere Anstieg der Maxwell-Verteilung liegt im Allgemeinen unter der Normalverteilung wogegen der langsamere Abfall für höhere Geschwindigkeiten stets oberhalb der Normalverteilung liegen wird. Die Höhe der Normalverteilung kann man durch eine größere Standardabweichung absenken und umgekehrt. Auch dies dient zur guten Veranschaulichung der Normierungsbedingung also der konstanten Gesamtfläche.

In einer obigen Überlegung ist bereits der Prozentsatz von Molekülen mit einer Geschwindigkeit größer als eine obere Grenze v_0 berechnet worden. Und zwar haben wir uns wiederum der Normierungsbedingung bedient, indem wir von Eins den Funktionswert von $r(v_0)$ abgezogen haben.

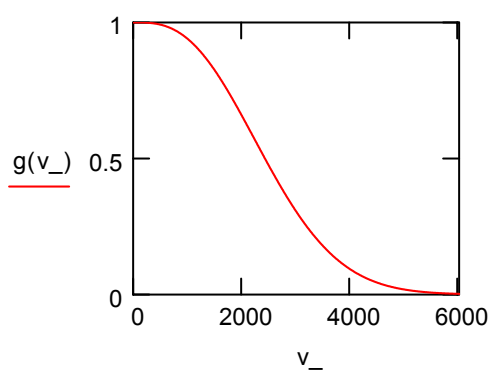
Auf Grund der Bedeutung soll das nochmals explizit angeführt werden, und wir definieren daher die Funktion $g(v_0)$, welche den Prozentanteil jener Moleküle angibt, welche eine größere Geschwindigkeit als v_0 besitzen.

$$g(v_0) := 1 - r(v_0)$$

Diese Funktion kann nun beispielsweise folgende Fragen beantworten:

1. Wie viele Gasmoleküle haben genug kinetische Energie, um eine endotherme chemische Reaktion auszulösen?
2. Wie viele Gasmoleküle haben genug kinetische Energie, um einem anderen Teilchen ein Elektron zu entreissen, also zu einer Stoßionisation zu führen?
3. Wie viele Gasmoleküle haben genug kinetische Energie, um ein anderes Teilchen zur Strahlung anzuregen, also zu einer Stoßanregung zu führen?
4. Wie viele Gasmoleküle haben genug kinetische Energie, um dem Schwerfeld der Erde oder dem eines anderen Planeten zu entweichen?

Die Funktion g wird graphisch dargestellt und für einige Zahlenwerte überprüft.



Die Funktion beginnt definitionsgemäß mit dem Funktionswert 1, da alle Moleküle eine positive Geschwindigkeit besitzen.

$$g(2227.24) = 0.572$$

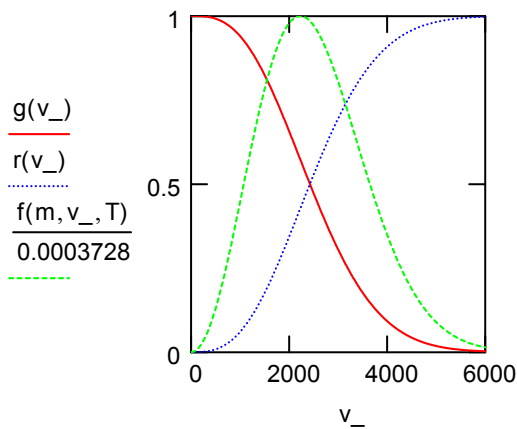
$$r(2227.24) = 0.428$$

Natürlich ergänzen sich die beiden Funktionen g und r stets auf Grund ihrer Definition zur konstanten Einsfunktion.

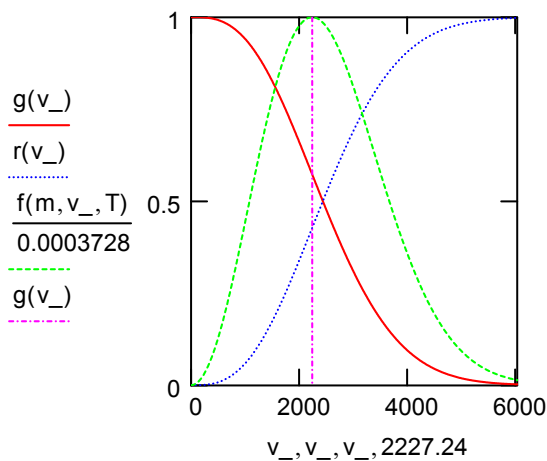
$$g(5000) = 0.018$$

Nur 1,8 % der Moleküle besitzen eine Geschwindigkeit von mehr als 5000 m/s.

Zum Vergleich sind im folgenden Graph die normierte Dichtefunktion, die Funktion r und die Funktion g in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit angegeben. Dabei wurde wieder eine Temperatur von 300 Kelvin und die Masse der Wasserstoffatome verwendet.



Da die Abweichung der Maxwell-Boltzmann-Verteilung von der symmetrischen Normalverteilung nicht allzu groß ist, erkennt man mit freiem Auge nicht, dass die Lage des Schnittpunkts von g und r nicht mit dem Maximum der Verteilungsfunktion zusammenfällt. Daher ist im nachfolgenden Graph die Parallele zur y -Achse durch das Maximum eingetragen. Es sei darauf hingewiesen, dass die Argumente für jede Funktion einzeln angegeben werden müssen.



Auf Grund des langsameren exponentiellen Abfalls ist die häufigste Geschwindigkeit links vom Schnittpunkt der Funktionen g und r . Das heisst, dass erst bei einer Geschwindigkeit oberhalb der häufigsten (hier bei 2227,24 m/s) 50 Prozent der Gasmoleküle eine Geschwindigkeit zwischen Null und diesem Wert besitzen. Da sich die Gleichung $r(v) = 0.5$ leider nicht auflösen läßt, kann man sich durch Probieren herantasten. Man kann hier das Prinzip der Intervallschachtelung wiederholen.

$r(2400) = 0.492$	$r(2450) = 0.510$
$r(2500) = 0.528$	$r(2425) = 0.501$
$r(2420) = 0.499$	$r(2422) = 0.500$

Nach kurzem Probieren erkennt man, dass 50 Prozent der Gasmoleküle eine Geschwindigkeit von höchstens 2422 m/s besitzen.

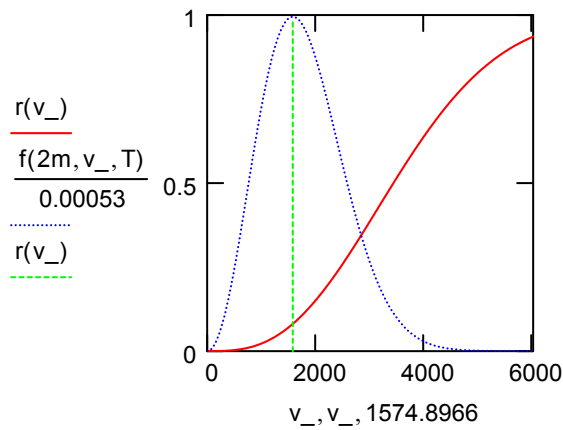
$$\frac{2422}{2227.42} = 1.087$$

Das heisst, dass die Asymmetrie der Verteilungsfunktion für 300 Kelvin und die Wasserstoffatommasse eine Verschiebung um 8,7% aus dem Maximum liefert.

Man kann noch prüfen, wie sich die Asymmetrie aus den Parametern m und T ergibt.

1. Einfluss der Molekülmasse auf die Asymmetrie

$$r(v_0) := \int_0^{v_0} f(2m, v, 4T) dv$$



$$f(2m, 1574.8966, T) = 0.00053$$

$$r(1700) = 0.100$$

$$r(1750) = 0.108$$

$$r(1720) = 0.103$$

$$r(1715) = 0.102$$

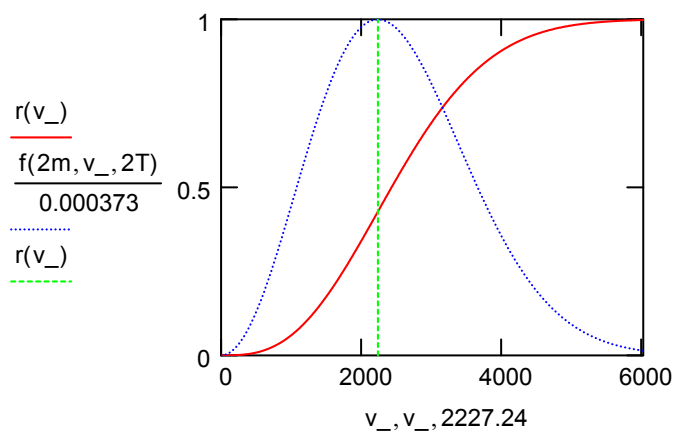
$$r(1713) = 0.102$$

$$\frac{1713}{1574.8966} = 1.088$$

Die Verschiebung beträgt nun 8,8 %.

2. Einfluss der Temperatur auf die Asymmetrie

$$r(v_0) := \int_0^{v_0} f(2m, v, 2T) dv$$



$$f(2m, 2227.24, 2T) = 0.000373$$

$$r(2422) = 0.500$$

$$\frac{2422}{2227.24} = 1.087$$

Da - wie oben bereits erwähnt - in die Verteilung das Verhältnis von m/T eingeht, liefert diese Berechnung wie oben die 8,7 % Abweichung.

Die Verschiebung beträgt nun 8,8 %.

[Zurück zur Inhaltsübersicht](#)