Peter Fischer pe.fischer@atn.nu

Wachstumsfunktionen - Beispiel Fichtenwachstum

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Exponentialfunktion, Differenzenquotient, Differentialquotient, Grenzwert, (logistische) Differentialgleichung

- Kurzzusammenfassung

  Untersuchung einer Wachstumsfunktion und der zugehörigen Wachstums-geschwindigkeitsfunktion von Fichten unter der Annahme eines logistischen Wachstums.
  Grundsätzlicher Vergleich verschiedener Wachstumsmodelle (linear, exponentiell, logistisch).
  Volumsfunktion des Stammes bei gleichzeitigem logistischem Wachstum von Durchmesser und Höhe (Vergleich verschiedener Modelle)

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik, alle Abteilungen, 3. Jahrgang (auch im 2. Jg möglich ohne Anwendung der Differential- und Integralrechnung)

- Mathcad-Version:

  Mathcad 2000 / Mathcad 2001

ÜBERSICHT

Wachstumsfunktion und Fichtenwachstum - Modellvergleiche

zur Übersicht

Fichten sind das wichtigste Nutzholz unserer mitteleuropäischen Breiten. Der Durchmesser von Fichten, gemessen in 1,3 Meter Höhe, kann näherungsweise und für einen bestimmten Zeitraum durch folgende Funktion beschrieben werden:

$$d(t) := \frac{1}{1 + e^{-0.05(t-60)}}$$

wobei der Durchmesser d in Metern und die Zeit t in Jahren angegeben werden.

Diese Wachstumsfunktion kann einerseits durch statistische Überlegungen (z.B. als Ausgleichsfunktion zu empirischen Daten) gewonnen werden, andererseits können Wachstumsprozesse mit einer oberen Wachstumsgrenze durch das logistische Wachstum beschrieben werden. Im folgenden werden drei Wachstumsmodelle - lineares Wachstum, unbegrenztes exponentielles Wachstum und das begrenzte logistische Wachstum - kurz vorgestellt.

Beim **linearen** Wachstum sind die **absoluten Zuwächse** pro Zeiteinheit **konstant.** Wir setzen:

$k := 3$ Diese Festlegung bedeutet beispielsweise, dass pro Zeiteinheit 3 Einheiten zuwachsen.

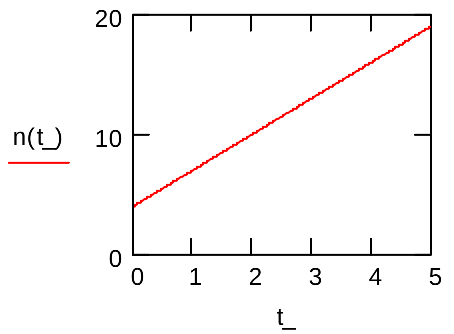
$n_0 := 4$ Die Anfangspopulation wird mit 4 festgesetzt.

$t\_ := 0, 0.01 .. 5$ Der Zeitraum wird zwischen 0 und 5 Zeiteinheiten festgesetzt.

HINWEIS: Ab der Version 2001 ist es notwendig, als Variable für die Grafik "t_" zu schreiben, um andernorts mit "t" symbolisch rechnen zu können! Sonst geht "t" als Vektor in die symbolische Rechnung ein und das gibt Probleme!

Wir erhalten also die folgende, lineare Funktion:

$n(t) := n_0 + k \cdot t$ Eine lineare Funktion mit der Steigung k und dem Ordinatenabschnitt n_0. Kostenfunktionen mit Fixkosten und variablen Kosten werden damit beispielsweise beschrieben.



Der Graph der linearen (Wachstums-) Funktion zeigt, dass pro Zeiteinheit die Funktion um den gleichen Absolutwert wächst.

Beim **exponentiellen** Wachstum sind die **relativen Zuwächse** pro Zeiteinheit **konstant,** sodass man mit

$\alpha := 1.05$ Damit wachsen pro Zeiteinheit 105 Prozent zu.

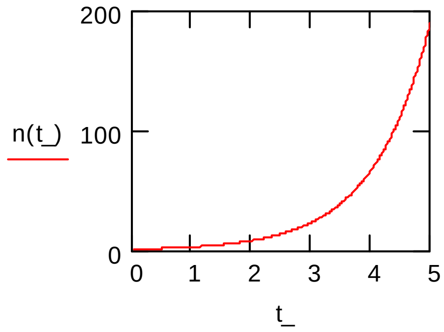
$n_0 := 1$ Die Anfangspopulation besitze eine Größenordnung.

$$\frac{\frac{d}{dt}n(t)}{n(t)} = \alpha$$

Die relativen Änderungen sind konstant.

beispielsweise durch Trennung der Variablen und anschließende Integration folgende Funktion erhält:

$n(t) := n_0 \cdot e^{\alpha \cdot t}$



Wie der Graph zeigt und nachfolgend durch die Grenzwertberechnung gezeigt wird, wächst die Exponentialfunktion für $\alpha > 0$ über alle Schranken.
Es ist daher klar, dass exponentielles Wachstum nur für (relativ) kleine Populationen und kurze Zeiträume angewendet werden kann.

$\lim_{t \to \infty} n(t) \to \infty$

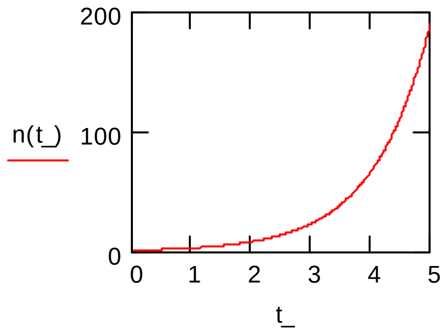
In Mathcad steht die **numerische** Lösung von Differentialgleichungen zur Vergügung, was hier zum Vergleich gezeigt wird.

Vorgabe

$\frac{d}{dt} n(t) = 1.05 \cdot n(t)$

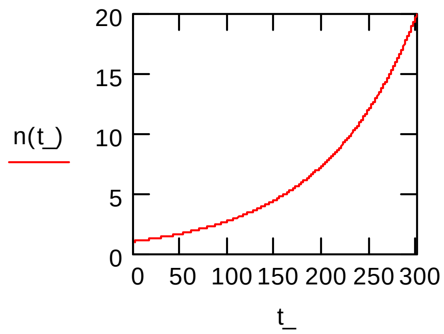
$n(0) = 1$

$n := \text{gdglösen}(t, 5)$



Die Übereinstimmung beider Graphen wird mit Freude zur Kenntnis genommen.
Es wird angeraten, den Einfluss des Faktors α zu untersuchen.
Beispielhaft wird $\alpha = 0.01$ empfohlen und untenstehend gezeichnet.

$\alpha := 0.01$ $\quad n(t) := n_0 \cdot e^{0.01 \cdot t}$ $\quad t\_ := 0, 0.1 .. 300$



Der Graph zeigt das ungehemmte Wachstum für eine konstante relative Zuwachsrate von einem Prozent.

Man erkennt dass sich die Population nach rund 70 Zeiteinheiten bereits verdoppelt, nach rund 230 Zeiteinheiten verzehnfacht und nach etwa 300 Zeiteinheiten bereits verzwanzigfacht hat, wie auch die nachstehenden Berechnungen zeigen.

$n(t) = 2 \;\Big|\; \begin{matrix}\text{auflösen}, t \\ \text{gleit}, 2\end{matrix} \to 69.$

$n(t) = 10 \;\Big|\; \begin{matrix}\text{auflösen}, t \\ \text{gleit}, 3\end{matrix} \to 230.$

$n(t) = 20 \;\Big|\; \begin{matrix}\text{auflösen}, t \\ \text{gleit}, 3\end{matrix} \to 300.$

Beim **logistischen** Wachstum tritt zum konstanten Zuwachsfaktor γ (bei Populationen auch Geburtsrate genannt) eine die **hemmenden Einflüssende** beschreibende Konstante τ hinzu, welche für Populationen auch Todesrate genannt wird, sodass sich die logistische Differentialgleichung mit

$\gamma := 1.05$ Damit wachsen pro Zeiteinheit 105 Prozent zu.

$\tau := 0.03$ Würde es sich um einen linearen hemmenden Beitrag alleine handeln, so wäre hier eine Abhahme von 3 % pro Zeiteinheit angegeben. Tatsächlich wirken sich aber die hemmenden Einflüsse für große Populationen dramatischer (quadratisch) aus.

$n_0 := 1$ Die Anfangspopulation besitze eine Größenordnung (Anfangsbedingung).

in folgender Form schreiben lässt:

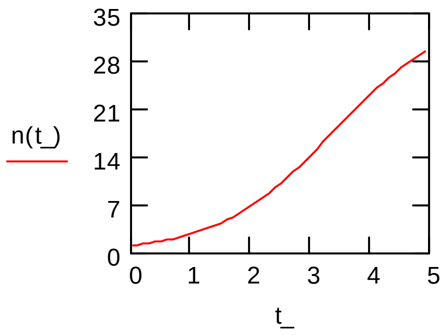
$$\frac{d}{dt}n(t) = \gamma \cdot n(t) - \tau \cdot n(t)^2$$

Die relativen Änderungen sind nicht mehr konstant.
Diese **logistische Differentialgleichung** wurde 1838 vom belgischen Mathematiker Pierre-Francois Verhulst (1804 - 1849) angegeben.

Diese Differentialgleichung kann zum Beispiel durch Trennen der Variablen, Partialbruchzerlegung und anschließende Integration gelöst werden (siehe z.B: Timischl / Kaiser: Ingenieurmathematik 4)

Man erhält schließlich:

$$n(t) := \frac{1}{\left(\frac{1}{n_0} - \frac{\tau}{\gamma}\right) \cdot e^{-\gamma \cdot t} + \frac{\tau}{\gamma}}$$



Die Population strebt gegen den Grenzwert 35.

$$\lim_{t \to \infty} n(t) \rightarrow 34.999999999999999999$$

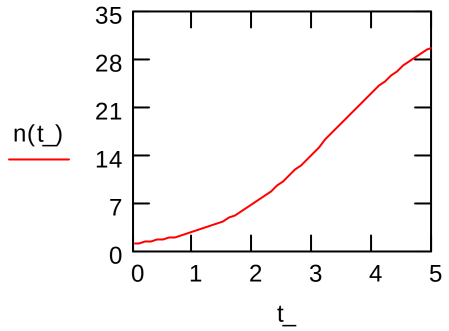
Wiederum wird die numerische Lösung der Differentialgleichung zum Vergleich gezeigt.

Vorgabe

$$\frac{d}{dt}n(t) = 1.05 \cdot n(t) - 0.03 \cdot n(t)^2$$

$n(0) = 1$

$n := \text{gdglösen}(t, 5)$



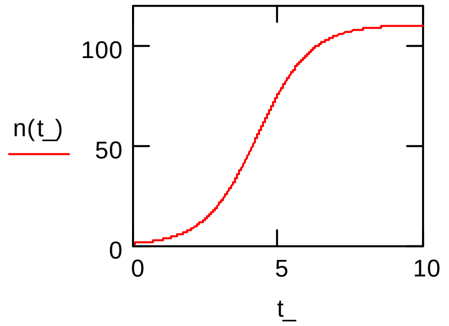
Die Übereinstimmung der beiden Graphen wird mit Freude zur Kenntnis genommen.

Die Population strebt für große Zeiten gegen 35.

Es wird angeraten, den Einfluss der Faktoren γ (Geburtenrate) und τ (Todesrate) zu untersuchen. Beispielhaft wird $\gamma = 1.10$ und $\tau = 0.01$ empfohlen und untenstehend gezeichnet.

$t\_ := 0, 0.01 .. 10$ Es werden 10 Zeiteinheiten dargestellt.

$$n(t) := \frac{1}{\left(1 - \frac{0.01}{1.10}\right) \cdot e^{-1.10 \cdot t} + \frac{0.01}{1.10}}$$



Für eine 110prozentige Zuwachsrate ist eine längere Zeitspanne ratsam, um die Stagnation besser zu sehen. Natürlich ist die kritische Größe, über welche die Population nicht hinwegkommt wesentlich größer als bei dem obigen Beispiel.

$$\lim_{t \to \infty} n(t) \rightarrow 110.00000000000000000$$

Ein anderer möglicher Ansatz für die logistische Differentialgleichung geht von folgender Überlegung aus: Die Populationsänderung ist wegen begrenzter Ressourcen nicht nur zu n(t) selbst, sondern auch zu (K - n(t)) proportional, wobei die kritische Wachstumsgröße K - wie bei den obigen Beispielen durch die Grenzwertberechnung ersichtlich - gerade γ/τ ist. Wir erhalten schließlich dieselbe Differentialgleichung wie oben:

$$\frac{d}{dt} n(t) = \tau \cdot n(t) \cdot \left(\frac{\gamma}{\tau} - n(t)\right) = \gamma \cdot n(t) - \tau \cdot n(t)^2$$

Nach dieser Erläuterung der logistischen Wachstumsfunktion nun aber zurück zur Fichtenwachstumsfunktion. Leider habe ich bisher keine wissenschafltliche Arbeit über die Anwendbarkeit der logistischen Wachstumsfunktion auf Fichten selbst gefunden, aber die zahlreichen Publikationen zum logistischen Wachstum, so beispielsweise bereits 1919 zum Höchenwachstum von Sonnenblumen oder 1920 zur Populationsbeschreibung von Drosophila (Fruchtfliegen) durch R. Pearl oder 1948 die Ausbreitung von Kriegslust in einer Population durch L. F. Richardson (nachzulesen in Heuser, Differentialgleichungen), zeigen, dass die logistische Wachstumsfunktion weit verbreitet und experimentell verifiziert ist.

Setzt man für $\gamma = 0.05 = \tau$, also $\tau/\gamma = 1$, und $n_0 = 1/(1+e^3)$ so erhält man aus der Gleichung

$$n(t) := \frac{1}{\left(\frac{1}{n_0} - \frac{\tau}{\gamma}\right) \cdot e^{-\gamma \cdot t} + \frac{\tau}{\gamma}}$$

$$n(t) := \frac{1}{e^3 \cdot e^{-0.05 \cdot t} + 1}$$ bzw. $$d(t) := \frac{1}{1 + e^{-0.05(t-60)}}$$

und damit die oben angegebene Fichtenwachstumsfunktion, wenn man auf eine Basis reduziert und -0.05 heraushebt.

1. Welchen **Fichtenstammdurchmesser** kann man nach 10, 25, 50 bzw. 100 Jahren erwarten?

$d(10) = 0.076$ $d(25) = 0.148$

$d(50) = 0.378$ $d(100) = 0.881$

Die einzelnen Durchmesser werden als Funktionswerte ermittelt.

2. Für welche untere **Altersgrenze** erscheint die gegebene Formel noch sinnvoll und weshalb?

$d(8) = 0.069$

$d(0) = 0.047$

Die Formel beschreibt das Wachstum sicherlich ab 10 Jahren ausgezeichnet; für geringere Wachstumsalter ist zu bezweifeln, dass die Dicke in einer Höhe von 1,3 m passend beschrieben wird. Man müßte für ganz junge Fichten die Dicke natürlich in einer geringeren Höhe messen.

3. Wie **alt** muss eine Fichte im Mittel werden, um einen Durchmesser von 0,2 m, 0,6 m bzw. 0,99 m zu erhalten?

$$\frac{1}{1+e^{-0.05(t-60)}} = 0.2 \;\Big|\; \begin{array}{l}\text{auflösen}, t\\ \text{gleit}, 3\end{array} \rightarrow 32.3$$

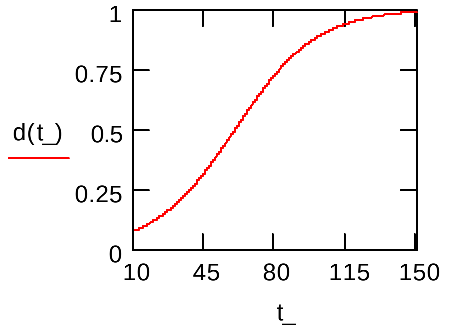
$$\frac{1}{1+e^{-0.05(t-60)}} = 0.6 \;\Big|\; \begin{array}{l}\text{auflösen}, t\\ \text{gleit}, 3\end{array} \rightarrow 68.1$$

$$\frac{1}{1+e^{-0.05(t-60)}} = 0.99 \;\Big|\; \begin{array}{l}\text{auflösen}, t\\ \text{gleit}, 3\end{array} \rightarrow 152.$$

4. Wie sieht der **Graph** der Funktion in einem sinnvoll gewählten Intervall aus?

$t\_ := 10, 10.1 .. 150$

Der Zeitraum wird zwischen 10 und 150 Jahren festgelegt.



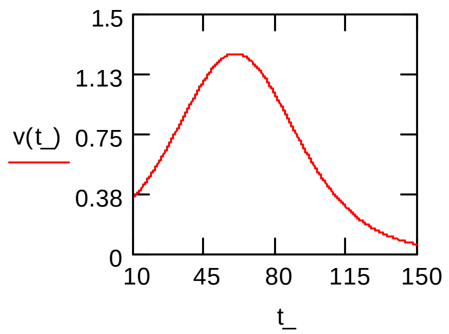
Der Fichtendurchmesser geht asymptotisch gegen einen Maximaldurchmesser von 1 Meter, wie auch die untenstehende Limesberechnung zeigt.

$$\lim_{t \to \infty} d(t) \rightarrow 1.$$

- **Wachstumsgeschwindigkeit beim Fichtenwachstum** zur Übersicht

5. Durch welche Funktion wird die (momentane) **Wachstumsgeschwindigkeit** angegeben und in welcher Einheit wird sie geschickterweise angegeben? Graphische Darstellung.

$$v(t) := 100\left(\frac{d}{dt}d(t)\right) \rightarrow \frac{5.00}{\left(1+\exp\left(-5.\cdot 10^{-2}\cdot t+3.00\right)\right)^2}\cdot \exp\left(-5.\cdot 10^{-2}\cdot t+3.00\right)$$



Durch die Multiplikation mit 100 ist die momentane Wachstumsgeschwindigkeit in Zentimeter pro Jahr (cm/a) angegeben.

Das Geschwindigkeitsmaximum ist klar erkennbar und ebenso die Abnahme der Geschwindigkeit in diesem Modell gegen Null für sehr alte Fichten. Auch hier kann der Grenzwert berechnet werden.

$$\lim_{t \to \infty} v(t) \rightarrow 0$$

6. Wie kann man eine **mittlere Wachstumsgeschwindigkeit** berechnen und welche Werte erhält man für die Intervalle: [10 a; 20a], [10a; 15a], [10a; 12a], [10a; 11a], [10a; 10,5a]?
Man vergleiche die **mittleren** Wachstumsgeschwindigkeiten mit der berechneten **Momentangeschwindigkeit** für t = 10a.

Mittlere Wachstumsgeschwindigkeit in cm/a als **Differenzenquotient.**

$\frac{d(20)-d(10)}{10}\cdot 100 = 0.433$ $\frac{d(15)-d(10)}{5}\cdot 100 = 0.390$

$\frac{d(12)-d(10)}{2}\cdot 100 = 0.366$ $(d(11)-d(10))\cdot 100 = 0.358$

$\frac{d(10.5)-d(10)}{.5}\cdot 100 = 0.354$

Man erkennt, dass die **mittleren** Geschwindigkeiten aufgrund der positiven Krümmung der Wachstumsfunktion d im betrachteten Zeitraum stets größere Werte als die Momentangeschwindigkeit ergeben; Die Konvergenz des Differenzenquotienten gegen den Differentialquotienten ist ebenfalls klar erkennbar.

$v(10) = 0.351$ Zum Vergleich die momentane Wachstumsgeschwindigkeit im 10. Wachstumsjahr.

7. Zu welchem Zeitpunkt ist die Wachstumsgeschwindigkeit von Fichten **maximal** und wie groß ist diese?

$a(t) := \frac{d}{dt}v(t)$ Die Änderung der Geschwindigkeit mit der Zeit wird üblicherweise als Beschleunigung definiert.

$a(t) = 0$ auflösen, $t \rightarrow 60.$ Der größte jährliche Zuwachs ergibt sich im 60ten Wachstumsjahr.

$v(60) = 1.250$ Der Durchmesser nimmt im 60ten Jahr um 1,25 cm zu.

Linearisierung der Wachstumsfunktion

zur Übersicht

8. Vergleiche die Fehler für den jährlichen Zuwachs, die man bei **Linearisierung** $d(t+\Delta t) = d(t) + d'(t)\Delta t$ erhält, für t = 10a, t = 30a, t = 60a, t = 90 a und t = 120 a, wenn jeweils $\Delta t = 1$ a. Begründe.

$\Delta d(t) := 100\cdot(d(t+1)-d(t))$ Absoluter Zuwachs in einem Jahr in cm.

$\Delta d(10) = 0.358$ $\Delta d(30) = 0.758$ $\Delta d(60) = 1.250$ $\Delta d(90) = 0.734$ $\Delta d(120) = 0.221$

Absoluter Zuwachs mit Hilfe der **Linearisierung** durch die erste Ableitungsfunktion.

$dl(t) := v(t)$

$dl(10) = 0.351$

$dl(30) = 0.746$

$dl(60) = 1.250$

$dl(90) = 0.746$

$dl(120) = 0.226$

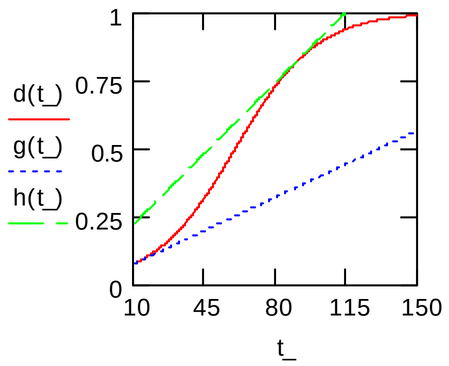
Da die Tangenten unterhalb des Maximalwachstums jeweils unterhalb der Funktion verlaufen, sind die angenäherten Zuwächse für diese Zeiten stets zu klein, da man zu kleine genäherte Funktionswerte (nach einem Jahr) verwendet. Ensprechend ergibt sich für Zeiten nach dem maximalen Wachstum eine zu große Näherung, wie im untenstehenden Graphen angedeutet ist. Für die maximale Wachstumsgeschwindigkeit ergibt sich (als logischer Zwischenpunkt) kein Fehler, da die Tangente verwendet wird und die Zeiteinheit gerade ein Jahr beträgt.

$k := \frac{v(10)}{100}$ Steigung der Tangente g

$g(t) := d(10) + k\cdot(t-10)$ Tangente im Punkt (10|d(10))

$k := \frac{v(90)}{100}$ Steigung der Tangente h

$h(t) := d(90) + k\cdot(t-90)$ Tangente im Punkt (90|d(90))



Man erkennt, dass die Tangenten je nach Krümmung der Funktion ober- bzw. unterhalb der Funktion verlaufen und damit entweder zu große oder zu kleine Näherungswerte liefern.

Volumenszunahme des Fichtenstammes - verschiedene Modellannahmen

zur Übersicht

9. Durch welches Modell kann die **Volumszunahme** des Stammes von Fichten im Zeitraum zwischen 10 und 100 Jahren beschrieben werden?

Um die Volumszunahme abzuschätzen, bedarf es vorerst einer **Höhenfunktion** h: h(t). Für die Volumsberechnung selbst sind mehrere Modelle denkbar.

Erstens kann man den Baum als **Drehkegels** der Höhe h(t) und eines aus dem Durchmesser d(t) in 1,3 m Höhe und der Höhe h(t) linear extrapolierten Durchmessers am Waldboden dB(t) beschreiben.

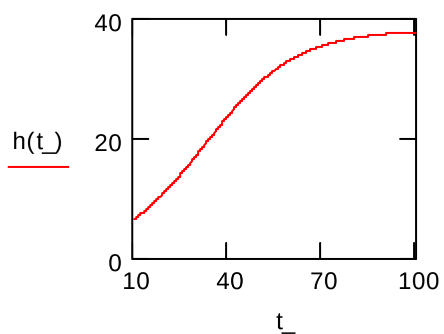
Zweitens kann man die in der Natur nicht vorhandene punktförmige Spitze eines Drehkegels durch einen Kreis von endlichem Durchmesser (etwa 1,5 cm) bei ausgewachsenen Fichten ersetzen und somit mit einem **Drehkegelstumpf** modellieren, wobei der Durchmesser am Boden wiederum durch lineare Extrapolation berechnet wird.

Drittens könnte die in der Natur beobachtete Verbreiterung zum Boden hin durch eine Parabel angenähert werden. Wegen fehlender Zahlenwerte wird diese Möglichkeit aber nicht berücksichtigt. Ebenso wird auf weitere Modelle verzichtet.

Ebenso wie der Durchmesser gehorcht auch die Höhe h einem logistischen Wachstumsgesetz, welches näherungsweise durch folgende Funktion h gegeben wird.

$$h(t) := \frac{38}{1 + 10e^{-0.07t}}$$

Dabei wird die Höhe h in Metern und das Alter t in Jahren angegeben.



Einige Zahlenwerte:

$h(10) = 6.370$

$h(15) = 8.446$

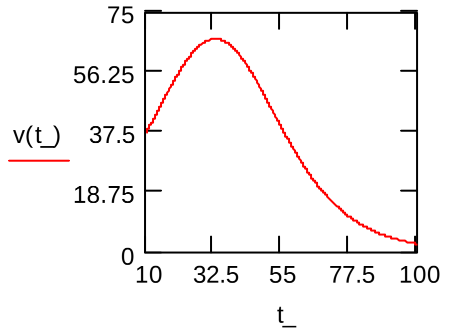
$h(20) = 10.964$

$h(50) = 29.186$

$$\lim_{t \to \infty} h(t) \to 38.$$

Eine eingehende Untersuchung dieser Funktion lohnt sich ebenfalls.
Von Interesse ist dabei natürlich die **Höhenwachstumsgeschwindigkeit** v(t).

$$v(t) := 100\left(\frac{d}{dt}h(t)\right) \to \frac{2660.00}{\left(1 + 10 \cdot \exp\left(-7. \cdot 10^{-2} \cdot t\right)\right)^2} \cdot \exp\left(-7. \cdot 10^{-2} \cdot t\right)$$



Durch die Multiplikation mit 100 ist die momentane Höhenwachstumsgeschwindigkeit in Zentimeter pro Jahr (cm/a) angegeben.

Das Geschwindigkeitsmaximum ist wieder klar erkennbar und ebenso die Abnahme der Geschwindigkeit gegen Null für sehr alte Fichten. Auch hier kann der Grenzwert berechnet werden.

$$\lim_{t \to \infty} v(t) \to 0$$

Wie kann man eine mittlere **Höhenwachstumsgeschwindigkeit** berechnen und welche Werte erhält man für die Intervalle: [10 a; 20a], [10a; 15a], [10a; 11a], [10a; 10,5a]?
Man vergleiche die **mittleren** Wachstumsgeschwindigkeiten mit der berechneten **Momentangeschwindigkeit** für t = 10a.

Mittlere Wachstumsgeschwindigkeit in cm/a als **Differenzenquotient.**

$$\frac{h(20) - h(10)}{10} \cdot 100 = 45.942 \qquad \frac{h(15) - h(10)}{5} \cdot 100 = 41.521$$

$$(h(11) - h(10)) \cdot 100 = 37.982$$

$$\frac{h(10.5) - h(10)}{.5} \cdot 100 = 37.546$$

Man erkennt, dass die **mittleren** Höhenwachstumsgeschwindigkeiten aufgrund der positiven Krümmung der Wachstumsfunktion h im betrachteten Zeitraum stets größere Werte als die Momentangeschwindigkeit ergeben; Die Konvergenz des Differenzenquotienten gegen den Differentialquotienten ist ebenfalls klar erkennbar.

$$v(10) = 37.113$$

Zum Vergleich die momentane Höhenwachstumsgeschwindigkeit im 10. Wachstumsjahr. Das heißt eine Fichte wächst im 10ten Jahr um durchschnittlich 37 cm zu.

Zu welchem Zeitpunkt ist die Höhenwachstumsgeschwindigkeit von Fichten **maximal** und wie groß ist diese?

$$a(t) := \frac{d}{dt} v(t)$$

Die Änderung der Geschwindigkeit mit der Zeit wird üblicherweise als Beschleunigung definiert.

$$a(t) = 0 \;\left|\; \begin{array}{l} \text{auflösen}, t \\ \text{gleit}, 3 \end{array} \right. \to 32.9$$

$$v(33) = 66.499$$

Der größte jährliche Zuwachs ergibt sich etwa im 33ten Wachstumsjahr. Die Höhe nimmt dabei um etwa 66,5 cm zu.

Beim ersten Stammvolumenmodell als **Drehkegel** ergibt sich der Durchmesser am Boden dB auf Grund der Ähnlichkeit der Dreiecke als

$$dB(t) := d(t) \cdot \frac{h(t)}{h(t) - 1.3}$$

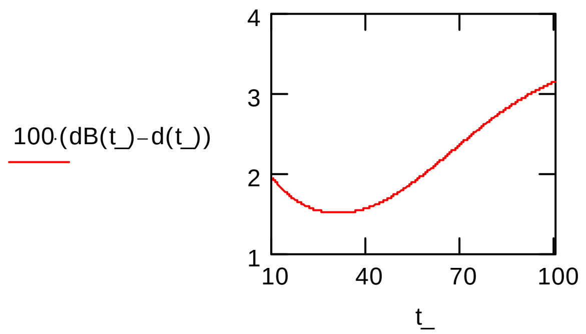
Einige Zahlenwerte der Durchmesser am Boden dB und in 1,3 Meter Höhe zum Vergleich:

$$dB(10) = 0.095 \qquad d(10) = 0.076$$

$$dB(30) = 0.197 \qquad d(30) = 0.182$$

$$dB(70) = 0.646 \qquad d(70) = 0.622$$

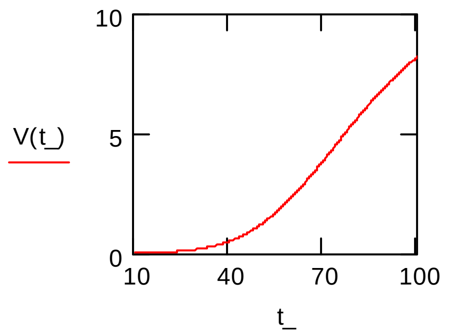
Man kann die Unterschiede der Durchmesser als Funktion der Zeit auftragen; Multiplikation mit 100 ergibt die Einheit Zentimeter.



Das Volumen im Drehkegelmodell ergibt sich damit zu:

$$V(t) := \frac{dB(t)^2 \cdot \pi \cdot h(t)}{12}$$

Auch diese Volumsfunktion in Kubikmetern scheint untersuchungswürdig zu sein.



Einige Zahlenwerte:

$V(20) = 0.052$

$V(50) = 1.193$

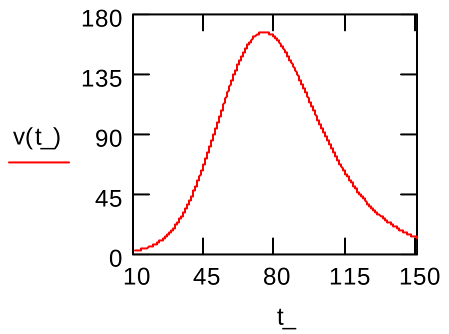
$V(80) = 5.511$

$$\lim_{t \to \infty} V(t) \to 10.665649019084652705$$

Von Interesse ist natürlich die **Volumenwachstumsgeschwindigkeit** v(t).

$$v(t) := 1000 \cdot \left(\frac{d}{dt} V(t)\right)$$

Auf die symbolische Auswertung wird verzichtet, da sie einige zusätzliche Seiten "vortäuscht".



Durch die Multiplikation mit 1000 ist die momentane Volumenwachstumsgeschwindigkeit in Kubikdezimeter pro Jahr (dm^3/a) angegeben.
Das Geschwindigkeitsmaximum knapp unterhalb von 80 Jahren ist wieder klar erkennbar und ebenso die Abnahme der Geschwindigkeit in diesem Modell gegen Null für sehr alte Fichten. Auch hier kann der Grenzwert berechnet werden.

$$\lim_{t \to \infty} v(t) \to 0$$

Wie kann man eine mittlere **Volumenwachstumsgeschwindigkeit** berechnen und welche Werte erhält man für die Intervalle: [10a; 15a], [10a; 11a], [10a; 10,5a]?

Man vergleiche die **mittleren** Wachstumsgeschwindigkeiten mit der berechneten **Momentangeschwindigkeit** für t = 10a.

Mittlere Volumenwachstumsgeschwindigkeit in dm^3/a als **Differenzenquotient.**

$$\frac{V(15) - V(10)}{5} \cdot 1000 = 2.587 \qquad (V(11) - V(10)) \cdot 1000 = 1.957 \qquad \frac{V(10.5) - V(10)}{.5} \cdot 1000 = 1.892$$

$v(10) = 1.830$ Zum Vergleich die **momentane** Wachstumsgeschwindigkeit im 10. Wachstumsjahr.

Beim zweiten Stammvolumenmodell als **Drehkegelstumpf** ergibt sich der Durchmesser am Boden dB auf Grund der Ähnlichkeit der Dreiecke wie man an einer Skizze sofort einsieht als

$$dB(t) := \left[(d(t) - 0.015) \cdot \frac{h(t)}{h(t) - 1.3}\right] + 0.015$$

Einige Zahlenwerte der Durchmesser am Boden und in 1,3 Meter Höhe zum Vergleich:

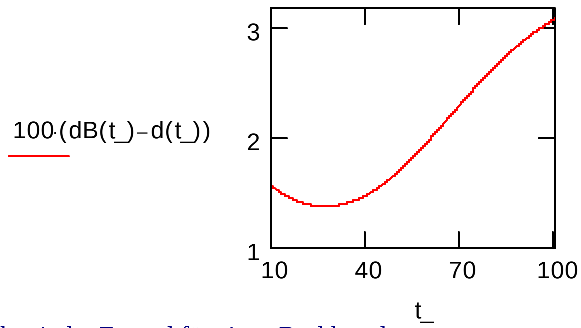
$dB(10) = 0.091$ $d(10) = 0.076$

$dB(30) = 0.196$ $d(30) = 0.182$

$dB(70) = 0.646$ $d(70) = 0.622$

Natürlich fallen nun beim Drehkegelstumpfmodell die Bodendurchmesser geringer aus als beim Drehkegelmodell.

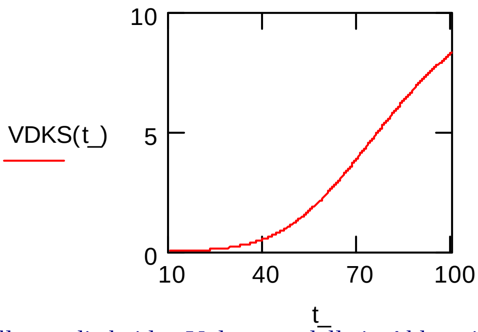
Man kann auch hier die Unterschiede der Durchmesser dB am Boden und d in 1,3 m Höhe als Funktion der Zeit auftragen; Multiplikation mit 100 ergibt die Einheit Zentimeter.



Das Volumen im **Drehkegelstumpfmodell** ergibt sich mit der Formel für einen Drehkegel zu:

$$VDKS(t) := \frac{\left(dB(t)^2 + dB(t) \cdot 0.015 + 0.015^2\right) \pi\, h(t)}{12}$$

Auch diese Volumsfunktion in Kubikmetern scheint interessant zu sein.



Einige Zahlenwerte der beiden Modelle:

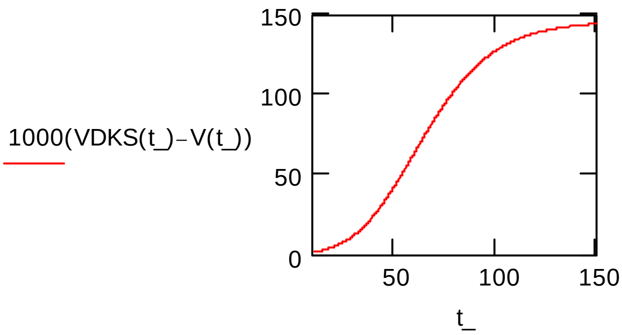
$VDKS(20) = 0.057$ $V(20) = 0.052$

$VDKS(50) = 1.236$ $V(50) = 1.193$

$VDKS(80) = 5.615$ $V(80) = 5.511$

Das Drehkegelstumpfmodell liefert also geringfügig größere Volumswerte.

Will man die beiden Volumsmodelle in Abhängigkeit von der Wachstumsdauer vergleichen, so empfiehlt sich wiederum eine graphische Darstellung. Der **absolute Unterschied** wird in dm^3/a angegeben.



Beachtet man, dass der Unterschied in dm^3 angegeben ist, so erscheint die Differenz vernachlässigbar und es können beide Volumenmodelle zur näherungsweisen Stammvolumenberechnung herangezogen werden.

zur Übersicht