Peter Fischer pe.fischer@atn.nu

Fourierreihen

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Fourierreihe, Fourierkoeffizienten, gerade und ungerade Funktionen, Periode

- Kurzzusammenfassung

  Die Entwicklung einer periodischen Funktion in eine additive Überlagerung von harmonischen Schwingungen mit natürlichen (Kreis-)Frequenzen n - also die Berechnung ihrer Fourierreihe - wird vorgeführt. Dabei wird insbesondere für eine gerade und eine ungerade Funktion die Vereinfachung bei der Berechnung der Fourierkoeffizienten dargestellt. Auch der Einfluss der Fourierkoeffizienten (z.B. Proportionalität zu 1/n oder zu 1/(n^2-1)) auf die Anzahl der zu verwendenden Teilschwingungen wird diskutiert. Abschließend wird eine endliche Fourierreihe der aus der Elektrotechnik bekannten Einweggleichrichtungsfunktion untersucht.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik und Elektrotechnik, alle Abteilungen, 4. Jahrgang

- Mathcad-Version:

  Mathcad 2001

Fourierreihen

Periodische Vorgänge spielen in der Technik und in den Naturwissenschaften eine bedeutsame Rolle. Daher sind periodische Funktionen der Periode p, also f(x+p) = f(x) von großem Interesse.
Um diese analytisch gut in den Griff zu bekommen, bedient man sich beispielsweise der Fourierreihenentwicklung einer periodischen Funktion in Sinus- und Cosinusfunktionen. Denn nach dem Satz von Fourier kann jede periodische Funktion als Überlagerung von Sinus- und Cosinusfunktionen der (Kreis-) Frequenz n, n eine natürliche Zahl, dargestellt werden. Im folgenden beschränken wir uns auf 2π-periodische Funktionen.

Eine Funktion ist gerade, wenn sie achsialsymmetrisch zur y-Achse ist, wenn also f(x) = f(-x) gilt;
Eine Funktion ist ungerade, wenn sie punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung O(0|0) ist, wenn also f(x) = - f(-x) ist.
Die elementaren trigonometrischen Funktionen Cosinus, Sinus, Tangens und Cotangens sind gerade (Cosinus) bzw. ungerade (Sinus, Tangens und Cotanges) wobei die Tangens- und Cotangesfunktion bereits einen Beleg dafür bilden, dass die multiplikative Zusammensetzung einer geraden (Cosinus-) und einer ungeraden Funktion (Sinusfunktion) eine ungerade Funktion liefert.

Sollte bei der Symmetrie noch weiterer Erklärungsbedarf bestehen, so empfiehlt sich die Begriffsklärung für gerade und ungerade Funktionen mit Hilfe der Potenzfunktionen (ax^n), welche gerade sind, wenn die Exponenten gerade sind und ungerade, wenn die Exponenten ungerade sind. Als Musterbeispiele dienen die identische Funktion y = x, welche ungerade ist und die Einheitsparabel $y = x^2$, welche gerade ist.

1. Fourierreihendarstellung einer geraden 2π-periodischen Funktion

$$f(x) := \frac{-(x-\pi)\cdot(x+\pi)}{\pi}$$

Eine Funktion f , welche 2π-periodisch sei, wird vorgegeben. Falls die Periode nicht 2π beträgt, so sind die Koeffizienten entsprechend anders zu berechnen.

$$a(n) := \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(n\cdot x)\,dx$$

Die Fourierkoeffizienten für die geraden Anteile der Entwicklung sind als bestimmtes Integral über das Produkt der Funktion f mit einer Cosinusfunktion zwischen den Periodizitätsgrenzen definiert.

$$b(n) := \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(n\cdot x)\,dx$$

Die Fourierkoeffizienten für die ungeraden Anteile der Entwicklung sind ebenfalls als bestimmtes Integral über das Produkt der Funktion f mit einer Sinusfunktion definiert.

Explizite Darstellung der Fourierkoeffizienten.

$$a(n) \rightarrow \frac{-4}{\pi^2}\cdot\frac{-\sin(\pi\cdot n)+\pi\cdot n\cdot\cos(\pi\cdot n)}{n^3}$$

$$b(n) \rightarrow 0$$

Weil die gegebene Funktion gerade ist, fallen die Koeffizienten für die ungeraden Anteile der Fourierreihenentwicklung weg. Wie oben bereits erwähnt ist das Produkt einer geraden Funktion mit einer ungeraden (hier die Sinusfunktionen sin(nx)) ungerade, sodass das bestimmte Integral zwischen -a und +a verschwindet.

Numerische Darstellung der ersten Koeffizienten für die Cosinusfunktionen.

$$a(0) = 4.189$$

$$a(1) = 1.273$$

Man erkennt die Proportionalität zu $1/n^2$, sodass eine "schnelle" Konvergenz der Fourrierreihe, gegen die gegebene gerade Funktion zu erwarten ist.

$$a(2) = -0.318$$

$$a(3) = 0.141$$

$$a(4) = -0.080$$

$$fa(n,x) := a(n)\cdot\cos(n\cdot x)$$

Mit fa(n,x) werden die cosinusförmigen Teilschwingungen, aus denen eine periodische Funktion zusammengesetzt werden kann, bezeichnet.

$$fb(n,x) := b(n)\cdot\sin(n\cdot x)$$

Mit fb(n,x) werden die sinusförmigen Teilschwingungen, aus denen eine periodische Funktion zusammengesetzt werden kann, bezeichnet.

Explizite Darstellung der ersten Sinus- bzw. Cosinusschwingung der Fourierentwicklung

$$fa(1,x) \rightarrow \frac{4}{\pi}\cdot\cos(x)$$

$$fb(1,x) \rightarrow 0$$

Weil die gegebene Funktion gerade ist, fallen die Koeffizienten und damit auch die Teilschwingungen für die ungeraden Anteile der Fourierreihenentwicklung weg.

$$fourier(n,x) := \frac{a(0)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(fa(k,x)+fb(k,x))$$

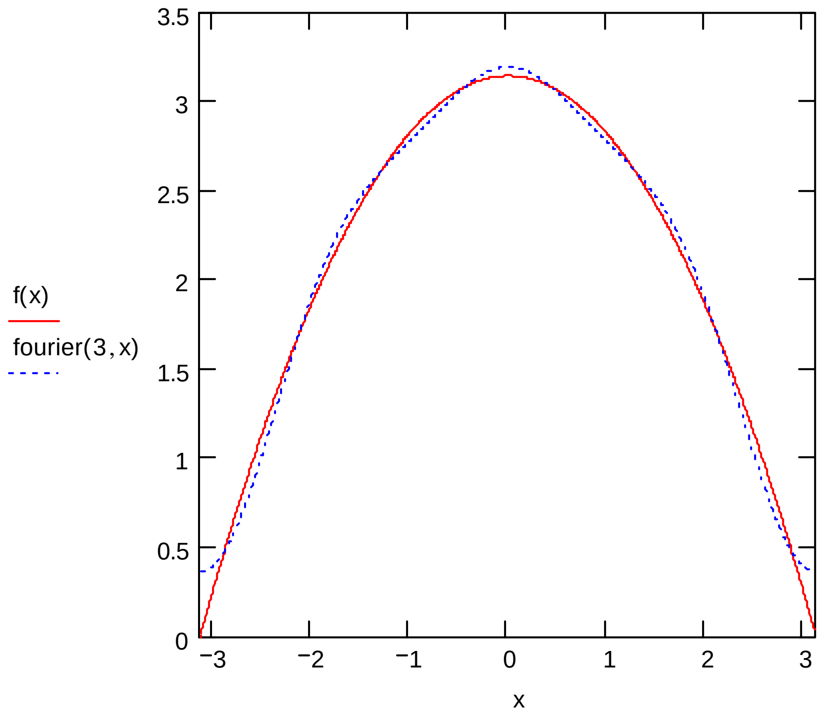
Das ist die Fourierreihendarstellung n-ter Ordnung einer 2π-periodischen Funktion f, das heisst, dass harmonische Schwingungen bis zur (Kreis-) Frequenz n berücksichtigt werden.

Will man noch mehr auf die Zusammensetzung aus Sinus- und Cosinusfunktionen hinweisen, empfiehlt sich folgende Darstellung:

$$\text{fourier}(n, x) := \frac{a(0)}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a(k)\cdot\cos(k\cdot x) + b(k)\cdot\sin(k\cdot x))$$

Explizite Darstellung der Fourierreihe dritter Ordnung für die gegebene Funktion.

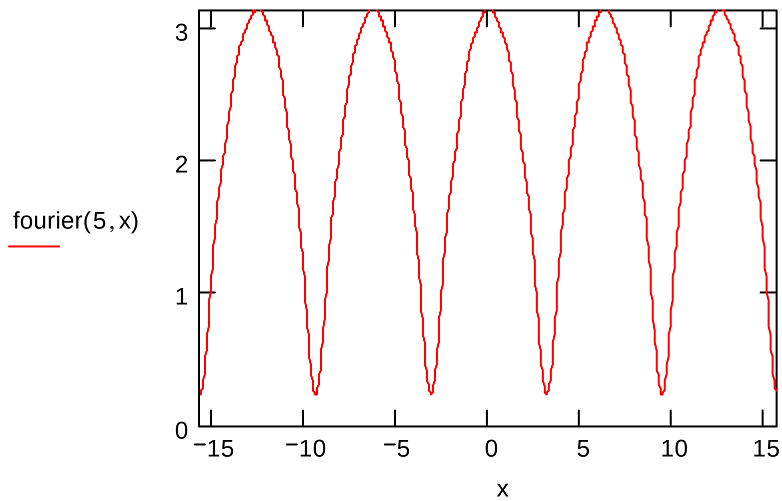
$$\text{fourier}(3, x) \rightarrow \frac{2}{3}\cdot\pi + \frac{4}{\pi}\cdot\cos(x) - \frac{1}{\pi}\cdot\cos(2\cdot x) + \frac{4}{9\cdot\pi}\cdot\cos(3\cdot x)$$



Man erkennt die sehr gute Übereinstimmung der endlichen Fourierreihe mit der gegebenen Funktion, obwohl lediglich die ersten 3 Schwingungen - die Grundschwingung, welche in der Akustik die Tonhöhe festlegt, und die beiden ersten Oberschwingungen, welche gemeinsam mit den anderen für die Klangfarbe (den Klang) sorgen - additiv überlagert sind.

Interessant erscheint nun auch die Vermittlung der Periodizität der Fourierreihe, sodass im nachfolgenden Graphen die Fourierreihe (bis zur 4ten Oberschwingung) für 5 Perioden dargestellt ist.

$$\text{fourier}(5, x) \rightarrow \frac{2}{3}\cdot\pi + \frac{4}{\pi}\cdot\cos(x) - \frac{1}{\pi}\cdot\cos(2\cdot x) + \frac{4}{9\cdot\pi}\cdot\cos(3\cdot x) - \frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\cos(4\cdot x) + \frac{4}{25\cdot\pi}\cdot\cos(5\cdot x)$$



2. Fourierreihendarstellung einer ungeraden 2π-periodischen Funktion

Die nachfolgend gegebene ungerade Funktion spielt in der Elektrotechnik eine bedeutsame Rolle und wird als Sägezahnfunktion bezeichnet.

$f(x) := x$ für $-\pi < x < \pi$ und $f(x+2k\pi) = f(x)$ und k eine ganze Zahl

Explizite Darstellung der Fourierkoeffizienten.

$$a(n) := \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(n \cdot x)\, dx$$

Die Fourierkoeffizienten für die geraden Anteile der Entwicklung sind als bestimmtes Integral zwischen den Periodizitätsgrenzen definiert.

$$b(n) := \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(n \cdot x)\, dx$$

Die Fourierkoeffizienten für die ungeraden Anteile der Entwicklung sind ebenfalls als bestimmtes Integral definiert.

$$a(n) \rightarrow 0$$

$$b(n) \rightarrow \frac{-2}{\pi} \cdot \frac{-\sin(\pi \cdot n) + \pi \cdot n \cdot \cos(\pi \cdot n)}{n^2}$$

Weil die gegebene Funktion ungerade ist, fallen die Koeffizienten für die geraden Anteile der Fourierreihenentwicklung weg. Wie oben bereits erwähnt ist das Produkt einer ungeraden Funktion (hier y = x) mit einer geraden (hier die Cosinusfunktionen cos(nx)) ungerade, sodass das bestimmte Integral zwischen -a und +a verschwindet.

Numerische Darstellung der ersten Fourierkoeffizienten für die Sinusschwingungen.

$b(1) = 2.000$

$b(2) = -1.000$

$b(3) = 0.667$

$b(4) = -0.500$

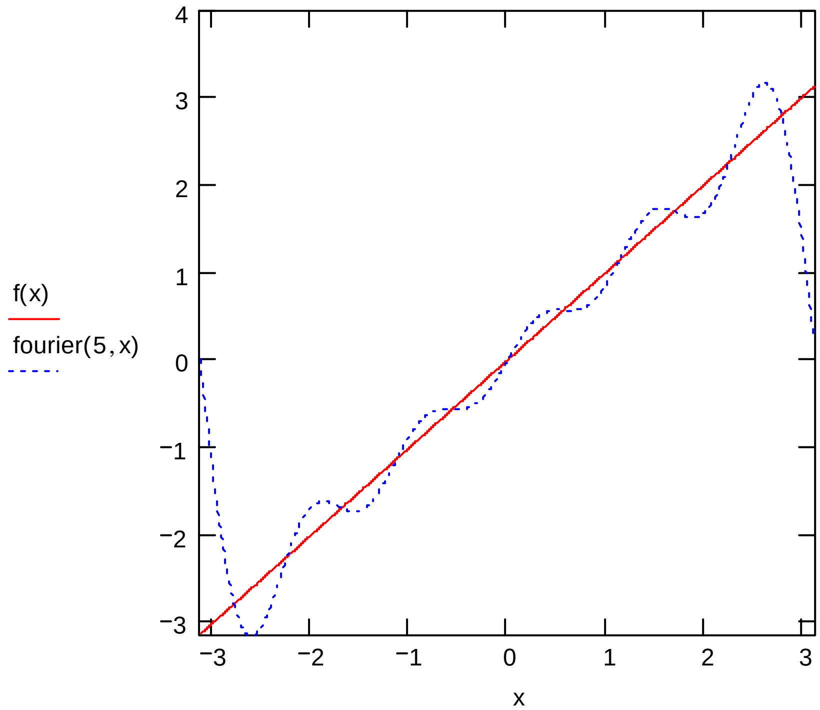
Aus der Darstellung erkennt man die alternierende Folge $(2/n)(-1)^{n+1}$.
Die Konvergenz ist also "langsam", sodass relativ viele Teilschwingungen berücksichtigt werden müssen.

Die Fourierreihendarstellung n-ter Ordnung einer 2π-periodischen Funktion f, das heisst, dass harmonische Schwingungen bis zur (Kreis-) Frequenz n berücksichtigt werden, lässt sich folgendermaßen schreiben.

$$fourier(n,x) := \frac{a(0)}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a(k) \cdot \cos(k \cdot x) + b(k) \cdot \sin(k \cdot x))$$

Explizite Darstellung der Fourierreihe fünfter Ordnung für die gegebene Funktion.

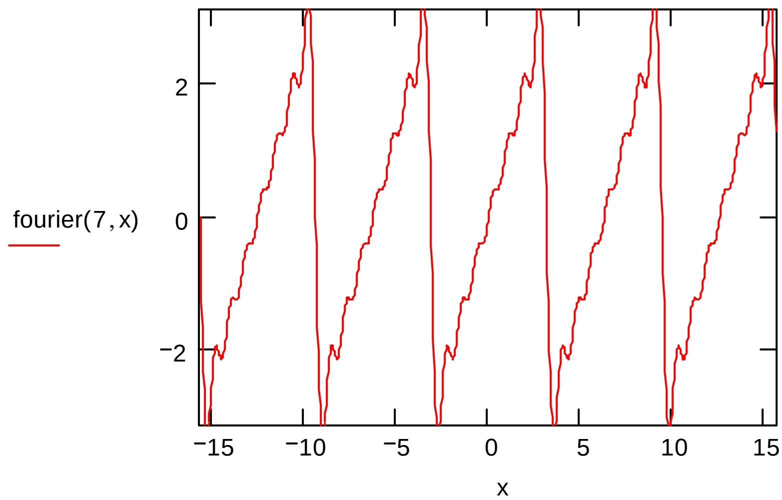
$$fourier(5,x) \rightarrow 2 \cdot \sin(x) - \sin(2 \cdot x) + \frac{2}{3} \cdot \sin(3 \cdot x) - \frac{1}{2} \cdot \sin(4 \cdot x) + \frac{2}{5} \cdot \sin(5 \cdot x)$$



Man erkennt die Übereinstimmung der endlichen Fourierreihe mit der gegebenen Funktion, obwohl lediglich die ersten 5 Schwingungen - die Grundschwingung, welche in der Akustik die Tonhöhe festlegt, und die beiden ersten Oberschwingungen, welche gemeinsam mit den anderen für die Klangfarbe (den Klang) sorgen - additiv überlagert sind.

Interessant erscheint wieder die Vermittlung der Periodizität, sodass im nachfolgenden Graphen die Fourierreihe (bis zur 6ten Oberschwingung) für 5 Perioden dargestellt ist.

$$\mathrm{fourier}(7,x) \rightarrow 2 \cdot \sin(x) - \sin(2 \cdot x) + \frac{2}{3} \cdot \sin(3 \cdot x) - \frac{1}{2} \cdot \sin(4 \cdot x) + \frac{2}{5} \cdot \sin(5 \cdot x) - \frac{1}{3} \cdot \sin(6 \cdot x) + \frac{2}{7} \cdot \sin(7 \cdot$$



3. Fourierreihendarstellung einer allgemeinen 2π-periodischen Funktion

Die nachfolgend gegebene Funktion spielt in der Elektrotechnik eine bedeutsame Rolle und wird als Einweggleichrichtungsfunktion bezeichnet.

Die Einweggleichrichtungsfunktion kann man sich aus zwei Teilfunktionen (nachfolgend mit f und g bezeichnet) zusammengesetzt denken. Dadurch vereinfacht sich die Berechnung der Koeffizienten und die bestimmten Integrale sind nur mehr zwischen den Grenzen 0 und π zu berechnen.

$f(x) := \sin(x)$ für $0 < x < \pi$ und $f(x+2k\pi) = f(x)$

$g(x) := 0$ für $-\pi < x < 0$ und $g(x+2k\pi) = g(x)$

Explizite Darstellung der Fourierkoeffizienten.

$$a(n) := \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(n \cdot x)\, dx$$

Die Fourierkoeffizienten für die geraden Anteile der Entwicklung sind als bestimmtes Integral zwischen den Periodizitätsgrenzen definiert.

$$b(n) := \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(n \cdot x)\, dx$$

Die Fourierkoeffizienten für die ungeraden Anteile der Entwicklung sind ebenfalls als bestimmtes Integral definiert.

$$a(n) \rightarrow \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{-\cos(\pi \cdot n)}{(1+n) \cdot (-1+n)} - \frac{1}{(1+n) \cdot (-1+n)} \right]$$

$$b(n) \rightarrow \frac{-1}{\pi} \cdot \frac{\sin(\pi \cdot n)}{(1+n) \cdot (-1+n)}$$

Weil die gegebene Funktion weder gerade noch ungerade ist, sind sowohl gerade als auch ungerade Teilfunktionen nötig, um die harmonische Analyse (Fourieranalyse), also die Zerlegung in harmonische Teilfunktionen durchzuführen.

Numerische Darstellung der ersten Fourierkoeffizienten für die Sinusschwingungen.

$a(0) = 0.637$ $b(1) = 0.500$

$a(1) = 0.000$ $b(2) = 0.000$

$a(2) = -0.212$ $b(3) = 0.000$

$a(3) = 0.000$

$a(4) = -0.042$

Aus der Darstellung erkennt man, dass nur eine ungerade Teilfunktion nötig ist und dass nur gerade Frequenzen für die Cosinusschwingungen verwendet werden.

Die Fourierreihendarstellung n-ter Ordnung einer 2π-periodischen Funktion f, das heisst, dass harmonische Schwingungen bis zur (Kreis-) Frequenz n berücksichtigt werden, lässt sich folgendermaßen schreiben.

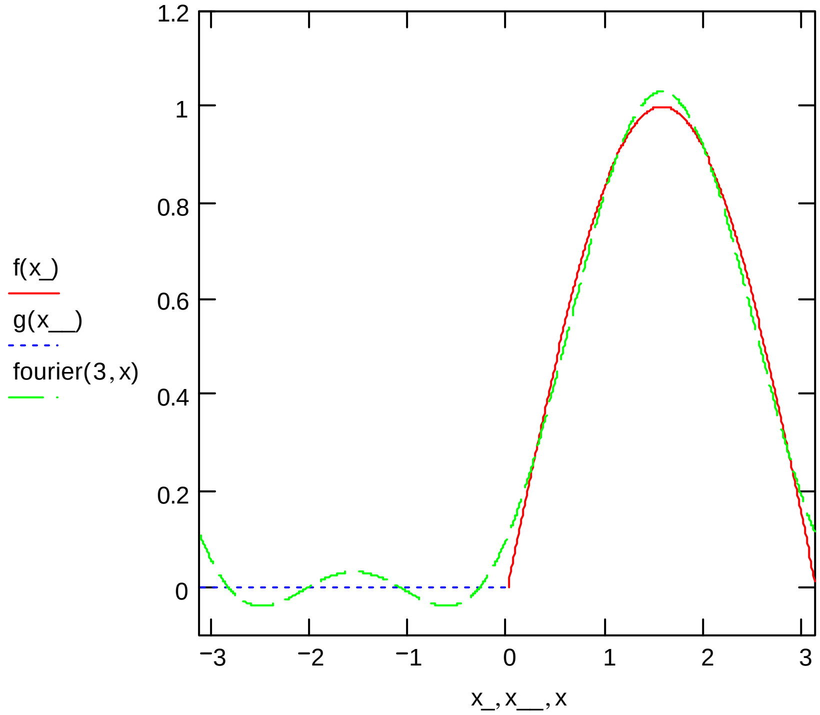
$$\text{fourier}(n, x) := \frac{a(0)}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a(k) \cdot \cos(k \cdot x) + b(k) \cdot \sin(k \cdot x))$$

Explizite Darstellung der Fourierreihe dritter Ordnung für die gegebene Funktion.

$$\text{fourier}(3, x) \rightarrow \frac{1}{\pi} + \sum_{k=1}^{3} \left[\frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{-\cos(\pi \cdot k)}{(k+1) \cdot (k-1)} - \frac{1}{(k+1) \cdot (k-1)} \right] \cdot \cos(k \cdot x) - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin(\pi \cdot k)}{(k+1) \cdot (k-1)} \cdot \sin(k \right.$$

$x\_ := 0, 0.01 .. \pi$ $x\_\_ := -\pi, -\pi + 0.01 .. 0$

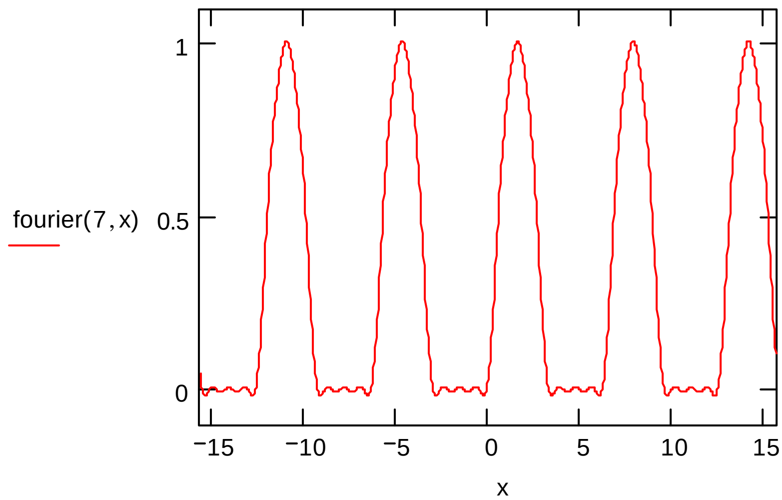
Diese Teilbereiche kann man umgehen, wenn man die Funktion gleich bereichsweise definiert.



Man erkennt die sehr gute Übereinstimmung der endlichen Fourierreihe mit der gegebenen Funktion, obwohl lediglich die ersten 3 Schwingungen - die Grundschwingung, welche in der Akustik die Tonhöhe festlegt, und die beiden ersten Oberschwingungen, welche gemeinsam mit den anderen für die Klangfarbe (den Klang) sorgen - additiv überlagert werden.

Interessant erscheint die Vermittlung der Periodizität, sodass im nachfolgenden Graphen die Fourierreihe (bis zur 6ten Oberschwingung) für 5 Perioden dargestellt ist.

$$\text{fourier}(7, x) \rightarrow \frac{1}{\pi} + \sum_{k=1}^{7} \left[\frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{-\cos(\pi \cdot k)}{(k+1)\cdot(k-1)} - \frac{1}{(k+1)\cdot(k-1)} \right] \cdot \cos(k \cdot x) - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin(\pi \cdot k)}{(k+1)\cdot(k-1)} \cdot \sin(k\right.$$



Für die Einweggleichrichtung soll die Güte der Näherung in Abhängigkeit vom Summenindex n, also der höchsten auftretenden Frequenz, demonstriert werden. Dazu wird zuerst der Graph für n = 20 gezeigt, und sodann die absoluten bzw. relativen Abweichungen für verschiedene Argumente x der Fourierreihe von der zu entwickelnden Funktion angegeben.

Es ist klar, dass die Konvergenz der Koeffizienten a(n) bzw. b(n) wesentlichen Einfluss auf die Güte der Näherung haben wird. Entsprechend wird man bei der Sägezahnfunktion, deren Koeffizienten proportional zu 1/n sind, sehr viele Teilschwingungen verwenden müssen, um zufriedenstellende Näherungen für möglichst viele Argumente des Periodizitätsbereichs zu erhalten. Die Konvergenz der Folge 1/n mit alterierendem Vorzeichen ist entsprechend "langsam" und erinnert sogleich an die Leibniz'sche Reihe, welche ja im Gegensatz zur harmonischen Reihe konvergiert, wie untenstehend gezeigt wird.

Hingegen wird bei Koeffizienten, welche indirekt proportional zum Quadrat der Frequenz n sind, eine sehr "schnelle" Konvergenz zu beobachten sein.

Da die Koeffizienten der Einweggleichrichtung proportional zum Kehrwert von (k^2 - 1) sind, erwartet man eine rasche

Konvergenz, also gute Näherungswerte für kleine n.

Die Leibnizreihe: $L(n) := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

$L(10) = 0.646$ $L(100) = 0.688$ $L(1000) = 0.69265$ $L(5000) = 0.69305$

$L(10000) = 0.69310$ $L(100000) = 0.693142$

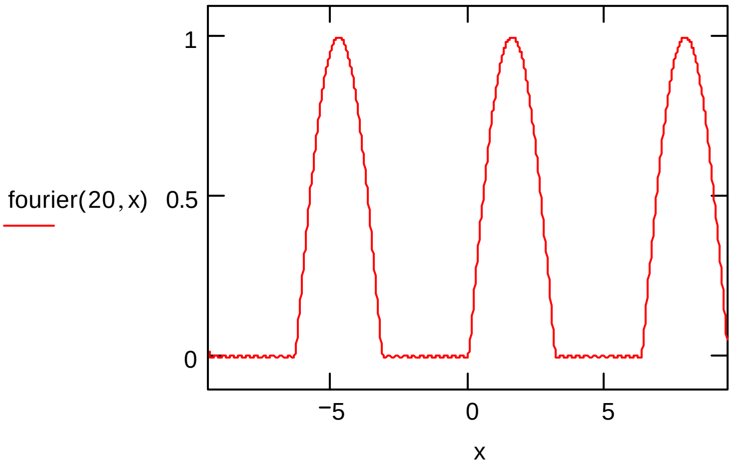
Man erkennt die langsame Konvergenz der Leibnizreihe.

Die harmonische Reihe: $H(n) := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$H(10) = 2.929$ $H(100) = 5.187$ $H(1000) = 7.48547$ $H(1000000) = 14.393$

Man erkennt die Divergenz der harmonischen Reihe, was durch die nachfolgende Limesbildung bestätigt wird.

$$\lim_{n \to \infty} H(n) \to \infty$$



$\text{fourier}\left(20, \frac{-\pi}{2}\right) = 0.001$

Man erkennt aus den Funktionswerten, dass für n = 20 die Abweichungen jeweils ein Promille betragen und für n = 40 rund 0,2 Promille.

$\text{fourier}\left(20, \frac{\pi}{2}\right) = 0.999$

$\text{fourier}\left(40, \frac{-\pi}{2}\right) = -0.00019$

$\text{fourier}\left(40, \frac{\pi}{2}\right) = 0.99981$

$\text{fourier}\left(100, \frac{\pi}{2}\right) = 0.99997$

Für n = 100 ist der Fehler im Hundertstel-Promille-Bereich.

$\text{fourier}(x) := \lim_{n \to \infty} \text{fourier}(n, x)$

Eine unendliche Fourierreihe ergibt sich als Limes der obigen Formel für n gegen unendlich.

Viele weitere Funktionen empfehlen sich zur Untersuchung; so beispielsweise die Zweiweggleichrichtung bzw. die Rechtecksschwingung oder andere in der Elektrotechnik übliche und häufig verwendete Funktionen.

x)

$\cdot\ x)\Big]$

$\cdot\ x)\Big]$