Peter Fischer pe.fischer@atn.nu

Fehlerrechnung mit Hilfe der Differentialrechnung

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Funktion in einer oder mehreren Variablen, erste Ableitung(sfunktion), partielle Ableitung(sfunktion), absoluter, relativer Fehler;

- Kurzzusammenfassung

  Für Funktionen in einer Variable, in zwei bzw. in drei Variablen wird die angenäherte Fehlerrechnung mit Hilfe der Differentialrechnung vorgeführt und die Erweiterung auf n Variablen angedeutet. Für die Funktion in einer Variable wird eine Potenzfunktion verwendet, um die Multiplikation des Fehlers der Messgröße mit dem Exponenten zu veranschaulichen. Speziell handelt es sich um eine Wurzelfunktion, also einen rationalen Exponenten. Daher wird der relative Eingangsfehler im Ergebnis halbiert. Für die Funktion in zwei Variablen wird als praktisches Beispiel ein Widerstandsmoment gegen Torsion betrachtet. Für die Funktion in drei Variablen habe ich die Periodendauer eines physischen Pendels gewählt, um den Einfluss der Parameter Trägheitsmoment, Masse und Schwerpunktsabstand des Drehpunkts zu demonstrieren.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik, Angewandte Physik, alle Abteilungen, 3. Jahrgang

- Mathcad-Version:

  Mathcad 11

1. Fehlerrechnung für Funktionen in einer Variablen

Zuerst wird ein funktioneller Zusammenhang definiert.
Hier ist die Schwingungsdauer eines idealisierten Fadenpendels der Länge l für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage gegeben. Die Gravitationsbeschleunigung sei konstant und betrage 9.81 m/s².

$g := 9.81$

$$T(l) := 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Nun wird die erste Ableitung der Funktion nach ihrer Variable berechnet.

$$\frac{d}{dl}T(l) \rightarrow .31927542840705046421 \cdot \frac{\pi}{l^{\frac{1}{2}}}$$

Der Messwert für die Fadenlänge wird angegeben.

$l := 1$

Der absolute Fehler des Messwerts wird angegeben.

$\Delta l := 0.01$

Der relative Fehler des Messwerts beträgt damit

$$\frac{\Delta l}{l} = 0.01$$

ein Prozent.

Die mittlere zu erwartende Größe für die durch die gegebene Funktion festgelegte physikalische Größe ergibt sich als Funktionswert an der Stelle des mittleren Messwerts.

$$T(l) = 2.01$$

Der absolute Maximalfehler läßt sich mit Hilfe der ersten Ableitung abschätzen.

$$\Delta T(l) := \left|\left(\frac{d}{dl}T(l)\right)\right| \cdot \Delta l$$

$$\Delta T(1) = 0.01$$

Der relative Maximalfehler ergibt sich somit als

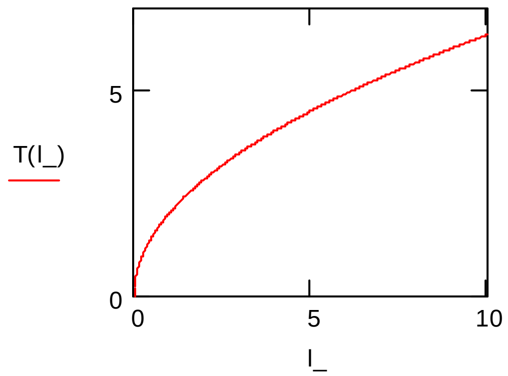
$$\frac{\Delta T(l)}{T(l)} = 0.005$$

und beträgt damit 0,5 Prozent. Man erkennt, dass der relative Fehler des Messwerts sich im Ergebnis halbiert, was durch den Wurzelzusammenhang zwischen T und l bewirkt wird. Denn beim Differenzieren ergibt sich der Faktor 1/2.

Anschaulich kann diese angenäherte Fehlerbestimmung mit Hilfe der Differentialrechnung als Tangentenproblem betrachtet werden, da die Funktion durch ihre Linearisierung ersetzt wird. Dass soll der folgende Graph andeuten.

$$T(l) := 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$l\_ := 0, 0.01 .. 10$$



2. Fehlerrechnung für Funktionen in zwei Variablen

Zuerst wird ein funktioneller Zusammenhang definiert.
Hier ist das Widerstandsmoment eines Rohres mit kreisringförmigen Querschnitt mit den Durchmessern D (Aussen-) und d (Innendurchmesser) gegen Verdrehung (Torsion) gegeben.

$$Wt(d,D) := \pi \cdot \frac{\left(D^4 - d^4\right)}{16D}$$

Nun wird die erste partielle Ableitung der Funktion nach der einen Variablen berechnet.

$$\frac{d}{dd}Wt(d,D) \rightarrow \frac{-1}{4} \cdot \pi \cdot \frac{d^3}{D}$$

Nun wird die erste partielle Ableitung der Funktion nach der anderen Variablen berechnet.

$$\frac{d}{dD}Wt(d,D) \rightarrow \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot D^2 - \frac{1}{16} \cdot \pi \cdot \frac{D^4 - d^4}{D^2}$$

Die Messwerte werden angegeben.

$D := 75.2$

$d := 60.6$

Die absoluten Fehler der Messwerte werden angegeben.

$\Delta D := 0.5$

$\Delta d := 0.4$

Die mittlere zu erwartende Größe für die durch die gegebene Funktion festgelegte physikalische Größe ergibt sich als Funktionswert an der Stelle der mittleren Messwerte.

$Wt(d,D) = 48286.45$

Der absolute Maximalfehler läßt sich mit Hilfe der partiellen Ableitungen erster Ordnung abschätzen.

$$\Delta Wt(d,D) := \left|\left(\frac{d}{dd}Wt(d,D)\right)\right| \cdot \Delta d + \left|\left(\frac{d}{dD}Wt(d,D)\right)\right| \cdot \Delta D$$

$\Delta Wt(60.6, 75.2) = 2829.39$

Man kann nun die einzelnen Beiträge zum Gesamtfehler berechnen.

Der Beitrag der ersten Messgröße ergibt sich als

$$\Delta Wtd := \left|\left(\frac{d}{dd}Wt(d,D)\right)\right| \cdot \Delta d$$

$\Delta Wtd = 929.72$

und der Beitrag der zweiten Messgröße als

$$\Delta WtD := \left|\left(\frac{d}{dD}Wt(d,D)\right)\right| \cdot \Delta D$$

$\Delta WtD = 1899.68$

Zur Überprüfung können die einzelnen Beiträge noch addiert werden.

$\Delta Wt := \Delta Wtd + \Delta WtD$

$\Delta Wt = 2829.39$

Die Übereinstimmung wird mit Freude zur Kenntnis genommen.

Der relative Maximalfehler ergibt sich somit als

$$\frac{\Delta Wt}{Wt(d, D)} = 0.06$$

und beträgt damit 5,9 Prozent.

3. Fehlerrechnung für Funktionen in drei (oder mehreren) Variablen

Für die Periodendauer T eines physischen Pendels (= ein starrer drehbar gelagerter Körper) ist die Beziehung

$$T(I, m, s) := 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot s}}$$

bekannt, wobei I das Trägheitsmoment, m die Masse und s den Abstand des Drehpunktes vom Schwerpunkt bezeichnet.

Nun wird die erste partielle Ableitung der Funktion nach der einen Variablen berechnet.

$$\frac{d}{dI}T(I, m, s) \rightarrow .31927542840705046421 \cdot \frac{\pi}{\left(\frac{I}{m \cdot s}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot m \cdot s}$$

Nun wird die erste partielle Ableitung der Funktion nach der zweiten Variablen berechnet.

$$\frac{d}{dm}T(I, m, s) \rightarrow -.31927542840705046421 \cdot \frac{\pi}{\left(\frac{I}{m \cdot s}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{I}{m^2 \cdot s}$$

Nun wird die erste partielle Ableitung der Funktion nach der dritten Variablen berechnet.

$$\frac{d}{ds}T(I, m, s) \rightarrow -.31927542840705046421 \cdot \frac{\pi}{\left(\frac{I}{m \cdot s}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{I}{m \cdot s^2}$$

Die Messwerte werden angegeben.

$I := 0.0056$

$m := 0.5$

$s := 0.05$

Die absoluten Fehler der Messwerte werden angegeben.

$\Delta I := 0.000056$

$\Delta m := 0.01$

$\Delta s := 0.0005$

Die mittlere zu erwartende Größe für die durch die gegebene Funktion festgelegte physikalische Größe ergibt sich als Funktionswert an der Stelle der mittleren Messwerte.

$T(I, m, s) = 0.95$

Das gegebene physische Pendel schwingt also mit einer Schwingungsdauer von rund einer Sekunde.

Der absolute Maximalfehler läßt sich mit Hilfe der partiellen Ableitungen erster Ordnung abschätzen.

$$\Delta T(I, m, s) := \left|\left(\frac{d}{dI}T(I, m, s)\right)\right| \cdot \Delta I + \left|\left(\frac{d}{dm}T(I, m, s)\right)\right| \cdot \Delta m + \left|\left(\frac{d}{ds}T(I, m, s)\right)\right| \cdot \Delta s$$

$\Delta T(0.0056, 0.5, 0.05) = 0.02$

Man kann nun die einzelnen Beiträge zum Gesamtfehler berechnen.

Der Beitrag der ersten Messgröße ergibt sich als

$$\Delta TI := \left|\left(\frac{d}{dI}T(I, m, s)\right)\right| \cdot \Delta I$$

$\Delta TI = 0.0047$

der Beitrag der zweiten Messgröße als

$$\Delta Tm := \left|\left(\frac{d}{dm}T(I, m, s)\right)\right| \cdot \Delta m$$

$\Delta Tm = 0.0095$

Man erkennt, dass der zweiprozentige Fehler in der Massenmessung sich 2mal so stark wie die einprozentigen Fehler im Trägheitsmoment und im Schwerpunktsabstand auswirkt.

und der Beitrag der dritten Messgröße als

$$\Delta Ts := \left|\left(\frac{d}{ds}T(I, m, s)\right)\right| \cdot \Delta s$$

$\Delta Ts = 0.0047$

Zur Überprüfung können die einzelnen Beiträge noch addiert werden.

$\Delta T := \Delta TI + \Delta Tm + \Delta Ts$

$\Delta T = 0.02$

Die Übereinstimmung wird mit Freude zur Kenntnis genommen.

Der realtive Maximalfehler ergibt sich zu

$$\frac{\Delta T}{T(0.0056, 0.5, 0.05)} = 0.02$$