Roland Pichler pc@htl-kapfenberg.ac.at

SRDP Haupttermin 2016, Cluster 3, Aufgabe 9 Roboter

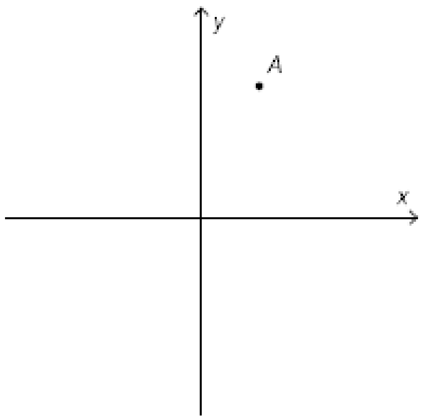
Aufgabe 9 (Teil B)

Roboter

a) Roboterbewegungen werden mithilfe der Vektorrechnung modelliert.

Folgende Anweisung zur Verschiebung eines Punktes ist vorgegeben:
„Der Punkt A wird um einen Vektor $\vec{s}$ mit den Komponenten $s_x > 0$ und $s_y < 0$ in den Punkt B verschoben.“

– Veranschaulichen Sie diese Anweisung, indem Sie einen möglichen Vektor $\vec{s}$ und den entsprechenden Punkt B im nachstehenden Koordinatensystem einzeichnen. *[1 Punkt]*



b) – Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$ ein Normalvektor des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ ist. *[1 Punkt]*

c) Die Spitze eines Roboterarms bewegt sich geradlinig vom Punkt $C = (1|-2|3)$ zum Punkt $D = (5|-3|2)$. Dort ändert sich die Bewegungsrichtung geringfügig und die Spitze bewegt sich geradlinig zum Punkt $E = (10|-4|0)$.

– Berechnen Sie den Winkel, um den die Bewegungsrichtung geändert wurde. *[1 Punkt]*

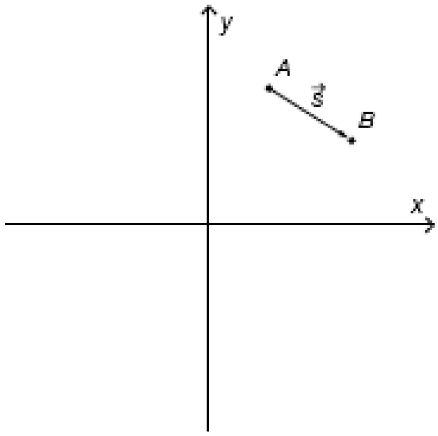
d) Für Schweißroboter werden Schweißelektroden benötigt.
Ein Unternehmen liefert Elektroden, deren Längen annähernd normalverteilt mit $\mu = 300$ mm und $\sigma = 5$ mm sind.
Man entnimmt einer umfangreichen Lieferung eine Zufallsstichprobe von 20 Schweißelektroden.

– Ermitteln Sie den zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem der Stichprobenmittelwert mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % liegt. *[2 Punkte]*

SRDP HT 2016 Aufgabe 9 Cluster 3, Roboter

Möglicher Lösungsweg

a) Zum Beispiel:



b) Für das Skalarprodukt $\vec{n} \cdot \vec{a}$ gilt:

$$\begin{bmatrix} -a_y \\ a_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \rightarrow a_x \cdot \overline{a_y} - a_y \cdot \overline{a_x} \xrightarrow{assume\,,\,a_x = real\,,\,a_y = real} 0$$

Bemerkung 1:
Lässt man die Schlüsselwörter *assume* und *real* weg, dann erhält man nicht 0 sondern den angegebenen Term.
Mathcadrechnet korrekt mit der Definition des komplexen Standardskalarprodukts.
Damit erreicht man, dass das Skalarprodukt eines Vektors ***a*** mit sich selbst reell und nicht nagativ ist. (siehe z.B.: http://homepages.uni-regensburg.de/~sem04141/mathCN5.pdf, Seite 53)
Man sieht das am folgenden Beispiel:

$$a := \begin{bmatrix} 2+3\mathrm{j} \\ 1-2\mathrm{j} \end{bmatrix} \quad , \quad a \cdot a = 18$$

Bemerkung 2:
Es scheint jedoch nicht sehr sinnvoll, diese allgemeine Fragestellung mit Technologie zu beantworten.
Es zeigt sich wieder: Technologie einsetzen, wenn es sinnvoll ist.

c) Zur Berechnung des Winkels zwischen den beiden Bewegungsrichtungen dient das Skalarprodukt der beiden Richtungsvektoren $\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{DE}$:

Bemerkung 3:
Der Vektorpfeil über dem Richtungsvektor ist nur von "kosmetischer" Natur. Das heißt, Mathcad verwendet den Pfeil als Operator (zum Vektorisieren), da dieser Operartor jedoch nciz auf Skalare wirkt, kann man damit auf einen Vektor hinweisen. Einen Vektor mit Pfeil zu definieren ist jedoch nicht möglich, daher wird im Folgenden ein Vektor ohne Pfeil dargestellt (durch die Spaltenschreibweise ist er jedoch erkennbar)

SRDP HT 2016 Aufgabe 9 Cluster 3, Roboter

$OC := \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\quad OD := \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad OE := \begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$

$CD := OD - OC \rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\quad DE := OE - OD \rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$$\varphi := CD \cdot DE = |CD| \cdot |DE| \cdot \cos(\varphi) \xrightarrow{solve, \varphi} \begin{bmatrix} \operatorname{acos}\left(\frac{23 \cdot \sqrt{15}}{90}\right) \\ -\operatorname{acos}\left(\frac{23}{90} \cdot \sqrt{15}\right) \end{bmatrix}$$

$\varphi_0 = 8.206\ °$ bzw. $\varphi_1 = -8.206\ °$

Bemerkung 4:
Mathcad liefert zwei richtige Lösungen, in der Lösungserwartung wird φ_0 angegeben.

d) Zu berechnen ist der zweiseitige 95% -Zufallstreubereich.

Bemerkung 4:
Der ZFS kann über die Funktion **qnorm** ohne Umweg über die Standardnormalverteilung (wie in der Lösungserwartung angegeben) berechnet werden.

WICHTIG: Unbedingt **OHNE** Einheiten rechnen.

$\mu := 300$ $\quad \sigma := 5$ $\quad n := 20$

$x_u := \operatorname{qnorm}\left(0.025, \mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ $\quad x_u = 297.809$

$x_o := \operatorname{qnorm}\left(0.975, \mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ $\quad x_o = 302.191$

Der 95% -Zufallstreubereich lautet daher [287,81 mm ; 302,19 mm].