

SRDP Haupttermin 2016, Cluster 4, Aufgabe 9 Vektorgrafiken

Aufgabe 10 (Teil B)

Vektorgrafiken

Eine Vektorgrafik besteht im Gegensatz zur Pixelgrafik nicht aus einzelnen Bildpunkten (Pixeln), sondern wird durch geometrische Primitive (Linie, Kreis, Polygone, Splines ...) definiert.

- a) Rechtecke können in einer Vektorgrafik durch Angabe der Eckpunkte als geschlossene Streckenzüge definiert werden.

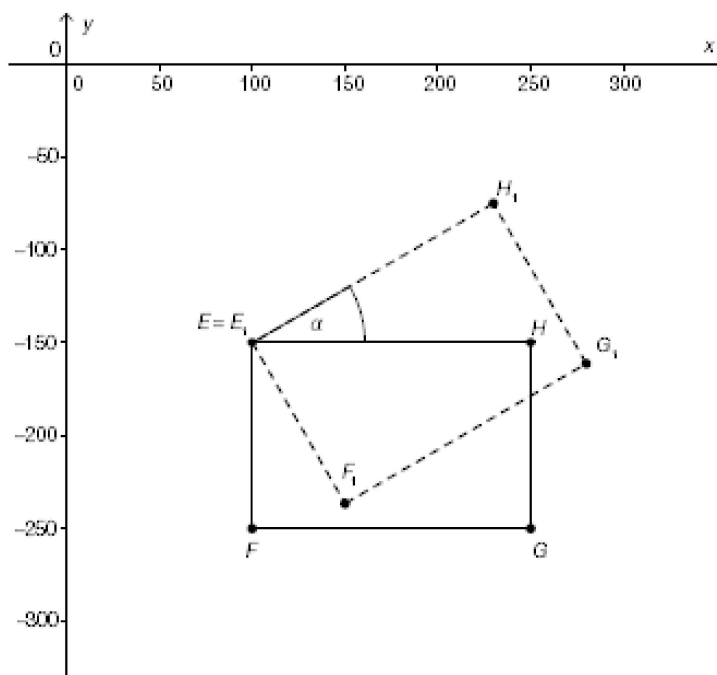
Es gibt zwei Rechtecke $ABCD$ mit:

- $A = (50|-100)$ und $B = (250|-250)$ sind zwei benachbarte Eckpunkte.
- Die Seite BC ist halb so lang wie die Seite AB .

– Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts C für eines dieser Rechtecke. [2 Punkte]

- b) Ein Vorteil von Vektorgrafiken ist, dass geometrische Transformationen sehr einfach und ohne Qualitätsverlust durchgeführt werden können.

Das in der nachstehenden Grafik dargestellte Rechteck $E_1F_1G_1H_1$ entstand aus dem Rechteck $EFGH$ durch Drehung um den Eckpunkt $E = (100|-150)$ gegen den Uhrzeigersinn.



– Zeigen Sie rechnerisch unter Verwendung der Punkte $E = (100|-150)$, $H = (250|-150)$ und $H_1 = (230|-75)$, dass der Drehwinkel gerundet 30° beträgt. [1 Punkt]

SRDP HT 2016 Aufgabe 10, Cluster 4,
Vektorgrafiken

c) – Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$ ein Normalvektor des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ ist. [1 Punkt]

d) Splines sind stückweise zusammengesetzte Funktionen, deren Graphen knickfrei ineinander übergehen. Knickfrei bedeutet, dass die Funktionen an den Stellen, an denen sie zusammenstoßen, den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung haben.

Ein kubischer Spline, der aus 2 Funktionen 3. Grades zusammengesetzt ist, ist für das Intervall $[0; 2]$ folgendermaßen definiert:

$$s_0(x) = -\frac{2}{3} \cdot x^3 + \frac{5}{3} \cdot x \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1$$

$$s_1(x) = \frac{4}{3} \cdot (x-1)^3 - 2 \cdot (x-1)^2 - \frac{1}{3} \cdot (x-1) + 1 \quad \text{für } 1 \leq x \leq 2$$

– Zeigen Sie, dass der Übergang von s_0 auf s_1 knickfrei erfolgt. [1 Punkt]

Möglicher Lösungsweg

a) Berechnung der Koordinaten eines Eckpunktes C.

Bemerkung 1:

Die Eingabe des Vektors erfolgt über *Strg M*. In die nächste Zeile gelangt man durch *Shift Enter*

$$OA := \begin{bmatrix} 50 \\ -100 \end{bmatrix} \quad OB := \begin{bmatrix} 250 \\ -250 \end{bmatrix} \quad \text{Ermittlung der Ortsvektoren}$$

$$AB := OB - OA \rightarrow \begin{bmatrix} 200 \\ -150 \end{bmatrix}$$

Bestimmung des Richtungsvektors vom Punkt A nach B und dessen Betrag L_{AB} (Länge)

$$L_{AB} := |AB| \rightarrow 250$$

$$n_{AB} := \begin{bmatrix} 150 \\ 200 \end{bmatrix}$$

Berechnung des Normalvektors n_{AB} auf AB und dessen Normaleinheitsvektors n_{AB0}

$$n_{AB0} := \frac{1}{|n_{AB}|} \cdot n_{AB} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$L_{BC} := \frac{1}{2} \cdot |AB|$$

Länge der Seite BC.

$$OC_1 := OB + L_{BC} \cdot n_{AB0} \rightarrow \begin{bmatrix} 325 \\ -150 \end{bmatrix}$$

Die Koordinaten eines Punktes C1 = (325|-150)

$$OC_2 := OB - L_{BC} \cdot n_{AB0} \rightarrow \begin{bmatrix} 175 \\ -350 \end{bmatrix}$$

Die Koordinaten eines Punktes C2 = (-175|350)

SRDP HT 2016 Aufgabe 10, Cluster 4,
Vektorgrafiken

b) Nachweis, dass der Drehwinkel α ca. 30° beträgt.

$$OE := \begin{bmatrix} 100 \\ -150 \end{bmatrix} \quad OH := \begin{bmatrix} 250 \\ -150 \end{bmatrix} \quad OH_1 := \begin{bmatrix} 230 \\ -75 \end{bmatrix}$$

$$EH := OH - OE \rightarrow \begin{bmatrix} 150 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$EH_1 := OH_1 - OE \rightarrow \begin{bmatrix} 130 \\ 75 \end{bmatrix}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{EH \cdot EH_1}{|EH| \cdot |EH_1|} \rightarrow \cos(\alpha) = \frac{26 \cdot \sqrt{901}}{901} \xrightarrow{\text{solve}, \alpha} \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{26}{15}\right) \\ \arctan\left(\frac{26}{15}\right) - \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29.982 \\ -29.982 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\alpha := \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{26}{15}\right)$$

$$R := \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{26}{15}\right)\right) & -\sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi - \arctan\left(\frac{26}{15}\right)\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{26}{15}\right)\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{26}{15}\right)\right) \end{bmatrix}$$

$$OH_D := R \cdot EH \rightarrow \begin{bmatrix} 150 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{26}{15}\right)\right) \\ 150 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{26}{15}\right)\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 129.928 \\ 74.958 \end{bmatrix} \quad OE + OH_D = \begin{bmatrix} 229.928 \\ -75.042 \end{bmatrix}$$

$$OF := \begin{bmatrix} 100 \\ -250 \end{bmatrix}$$

$$EF := OF - OE \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -100 \end{bmatrix}$$

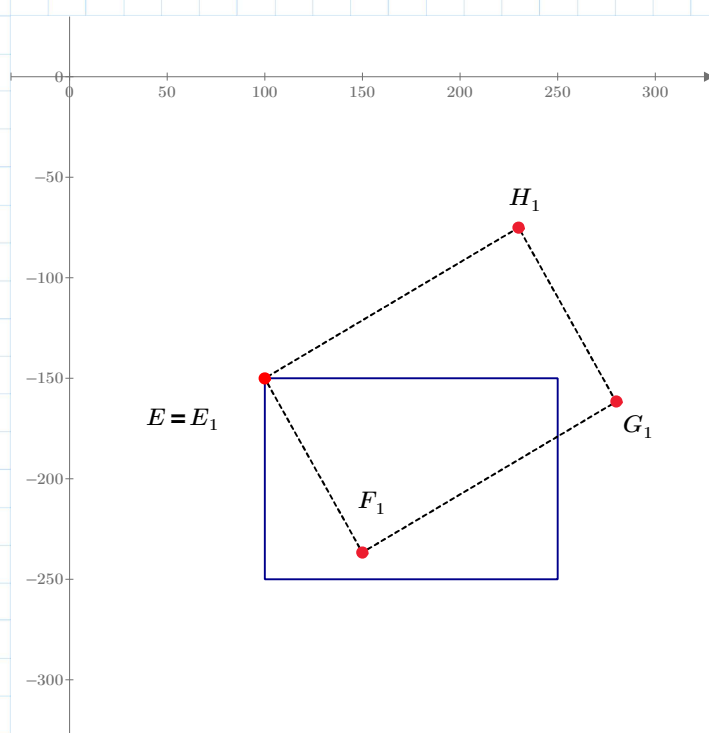
$$OF_D := R \cdot EF \rightarrow \begin{bmatrix} 100 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{26}{15}\right)\right) \\ -100 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{26}{15}\right)\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49.972 \\ -86.619 \end{bmatrix} \quad OF_1 := OE + OF_D = \begin{bmatrix} 149.972 \\ -236.619 \end{bmatrix}$$

$$OG_1 := OF_1 + OH_D \rightarrow \begin{bmatrix} 279.90008325624777 \\ -161.660190581423467 \end{bmatrix}$$

SRDP HT 2016 Aufgabe 10, Cluster 4,
Vektorgrafiken

$$V := \begin{bmatrix} 100 & -150 \\ 100 & -250 \\ 250 & -250 \\ 250 & -150 \\ 100 & -150 \end{bmatrix}$$

$$V_D := \begin{bmatrix} 100 & -150 \\ OF_{1_0} & OF_{1_1} \\ OG_{1_0} & OG_{1_1} \\ OH_{1_0} & OH_{1_1} \\ 100 & -150 \end{bmatrix}$$



SRDP HT 2016 Aufgabe 10, Cluster 4,
Vektorgrafiken

c) Für das Skalarprodukt $\vec{n} \cdot \vec{a}$ gilt:

$$\begin{bmatrix} -a_y \\ a_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \rightarrow a_x \cdot a_y - a_y \cdot a_x \xrightarrow{\text{assume, } a_x = \text{real}, a_y = \text{real}} 0$$

Bemerkung 2:

Lässt man die Schlüsselwörter *assume* und *real* weg, dann erhält man nicht = sondern den angegebenen Term.

Mathcad rechnet korrekt mit der Definition des komplexen Standardskalarprodukts.

Damit erreicht man, dass das Skalarprodukt eines Vektors $\vec{a}$ mit sich selbst reell und nicht negativ ist. (siehe z.B.: <http://homepages.uni-regensburg.de/~sem04141/mathCN5.pdf>, Seite 53)

Man sieht das am folgenden Beispiel:

$$a := \begin{bmatrix} 2 + 3j \\ 1 - 2j \end{bmatrix}, \quad a \cdot a = 18$$

Bemerkung 3:

Es scheint jedoch nicht sehr sinnvoll, diese allgemeine Fragestellung mit Technologie zu beantworten.

Es zeigt sich wieder: Technologie einsetzen, wenn es sinnvoll ist.

d) Zeigen Sie, dass der Übergang von s_0 auf s_1 Knickfrei ist.

$$s_0(x) := -\frac{2}{3} \cdot x^3 + \frac{5}{3} \cdot x$$

$$s_1(x) := \frac{4}{3} \cdot (x-1)^3 - 2 \cdot (x-1)^2 - \frac{1}{3} \cdot (x-1) + 1$$

$$s_0(1) = 1$$

$$s_1(1) = 1$$

$$s'_0(x) := \frac{d}{dx} s_0(x) \rightarrow \frac{5}{3} - 2 \cdot x^2$$

$$s'_1(x) := \frac{d}{dx} s_1(x) \rightarrow \frac{5}{3} - 2 \cdot x^2$$

$$s'_0(1) \rightarrow -\frac{1}{3}$$

$$s'_1(1) \rightarrow -\frac{1}{3}$$

Bemerkung 3:

Die Einheiten lm und lm/W erhält man durch Hineinschreiben in den Platzhalter nach dem berechneten Wert.