Roland Pichler pc@htl-kapfenberg.ac.at

SRDP Aufgaben Cluster 3
Raketenstart

Raketenstart

Aufgabennummer: B-C3_04

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Trägerraketen ermöglichen es, schwere Nutzlasten in die Erdumlaufbahn zu befördern.
Ariane 5 ist die leistungsfähigste europäische Trägerrakete.
Beim Start der Ariane 5 lässt sich der senkrecht nach oben zurückgelegte Weg *s* in Abhängigkeit von der Zeit *t* durch eine quadratische Funktion beschreiben.

a)

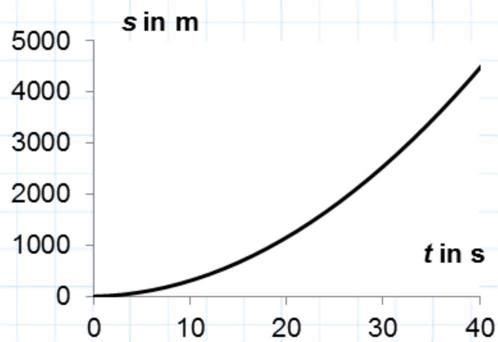
t in s	*s*(*t*) in m
0	0
2	16,1
4	53,8

s(*t*) ... zurückgelegter Weg in Metern (m) zum Zeitpunkt *t*
t ... Zeit in Sekunden (s)

– Stellen Sie die allgemeine Funktion *s* für den gegebenen Zusammenhang auf.

– Ermitteln Sie mithilfe der Werte aus der Tabelle die entsprechenden Parameter der Funktion *s*.

b) Folgender Graph beschreibt den zurückgelegten Weg *s* in Abhängigkeit von der Zeit *t* in der Startphase der Rakete:



– Erklären Sie den Unterschied zwischen der Momentangeschwindigkeit *v* für den Zeitpunkt t_0 = 30 s und der Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}$ für $\Delta t = 30\ s - 0\ s$ mithilfe der Begriffe *Differenzenquotient* und *Differenzialquotient*.

– Veranschaulichen Sie diese in obiger Grafik.

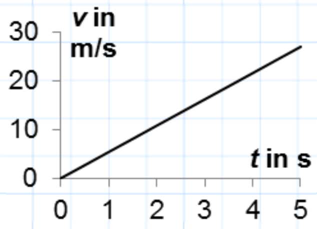
c) Die Beschleunigung der Ariane 5 in der Startphase beträgt etwa 5,4 m/s².

Nur nichtkommerzielle Verwendung

c) Die Beschleunigung der Ariane 5 in der Startphase beträgt etwa 5,4 m/s².

– Geben Sie die Funktionen für die Beschleunigung, die Geschwindigkeit und den Weg in Abbhängigkeit von der Zeit an.

d) Der Graph stellt die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion *v* der Rakete in den ersten 5 Sekunden des Starts dar.



– Veranschaulichen Sie die Abhängigkeit der Beschleunigungs-Zeit-Funktion *a* und der Weg-Zeit-Funktion *s* von der gegebenen Funktion *v*, indem Sie *a* und *s* zeichnen.

– Erklären Sie, was man aus der Kenntnis der Eigenschaften des Graphen von *v* über die Graphen von *a* und *s* aussagen kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Lösung zu a) 1. Teil

Zeit (s)	Weg (m)
0	0
2	16.1
4	53.8

$$s(t) := a \cdot t^2 + b \cdot t + c$$

Lösung zu a) 2. Teil

$$[a\ \ b\ \ c] := \begin{bmatrix} s(Zeit_0) = Weg_0 \\ s(Zeit_1) = Weg_1 \\ s(Zeit_2) = Weg_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{solve, a, b, c} \begin{bmatrix} \frac{2.7 \cdot m}{s^2} & \frac{2.65 \cdot m}{s} & 0 \end{bmatrix}$$

$$s(t) := a \cdot t^2 + b \cdot t + c \rightarrow \frac{2.65 \cdot t \cdot m}{s} + \frac{2.7 \cdot t^2 \cdot m}{s^2}$$

Nur nichtkommerzielle Verwendung

__Lösung zu b) 1. Teil__

Die **Durchschnittsgeschwindigkeit** ist der **Differenzenquotient** aus Wegdifferenz durch Zeitdifferenz. (In diesem Fall ist $\Delta t = 30\ s$, Δs errechnet man aus der Funktionsgleichung.)

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$ = *s*'(*t*) … Steigung der Tangente, Differenzialquotient

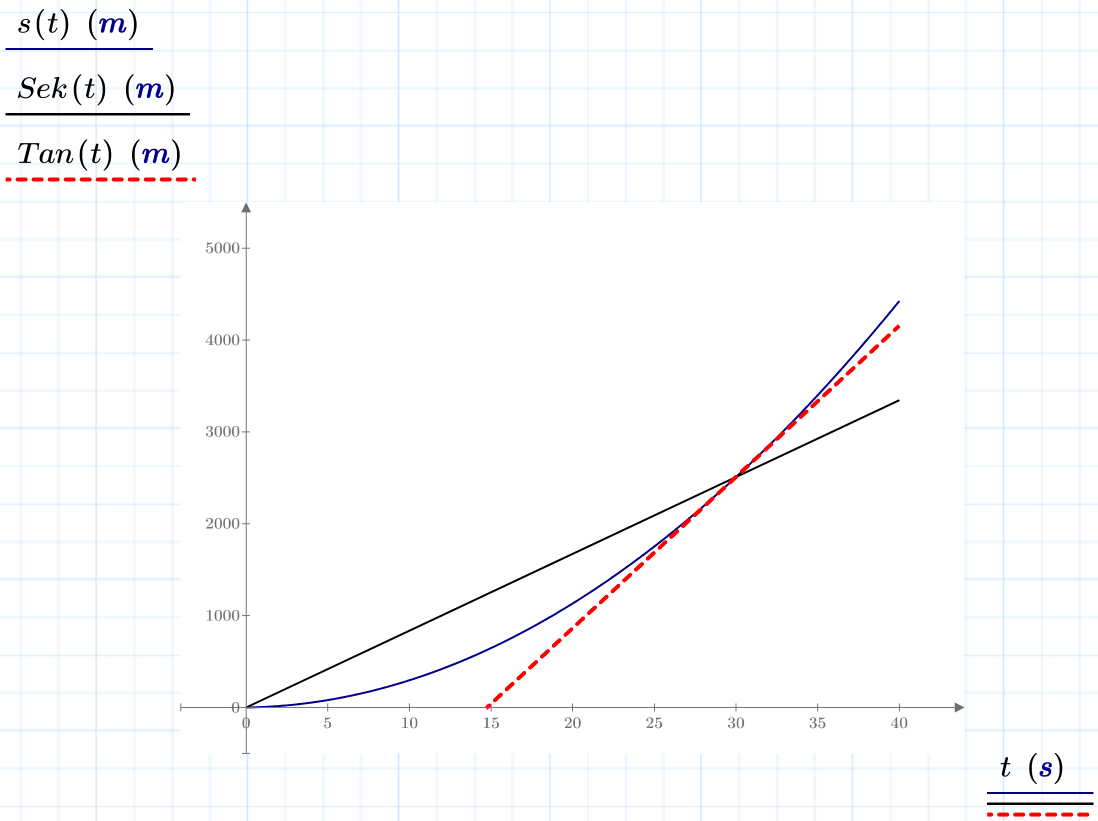
Die **Momentangeschwindigkeit** erhält man durch die Bildung des **Grenzwerts des Differenzenquotienten,** wobei man Δt gegen 0 streben lässt. Der Differenzialquotient ist die erste Ableitung des Weges nach der Zeit und die Steigung der Tangente an der Stelle *t* = 30 s.

__Lösung zu b) 2. Teil__

$t := 0\ s, 0.1\ s .. 40\ s$

$$Sek(t) := \frac{s(30\ s)}{30\ s} \cdot t$$

$$Tan(t) := s'(30\ s) \cdot (t - 30\ s) + s(30\ s)$$



Nur nichtkommerzielle Verwendung

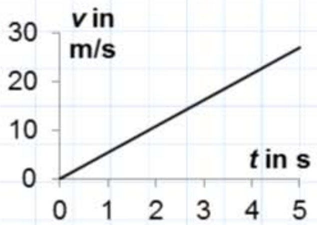
Lösung zu c)

$$a(t) := 5.4$$

$$v(t) := \int_0^t a(z)\,\mathrm{d}z \rightarrow \int_0^t 5.4\,\mathrm{d}z \rightarrow \frac{27 \cdot t}{5}$$ Geschwindigkeitsfunktion

$$s(t) := \int_0^t v(z)\,\mathrm{d}z \rightarrow \frac{27 \cdot t^2}{10}$$ Wegfunktion

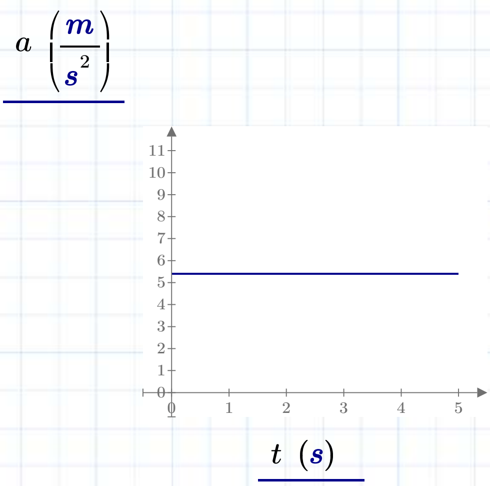
Lösung zu d) 1. Teil

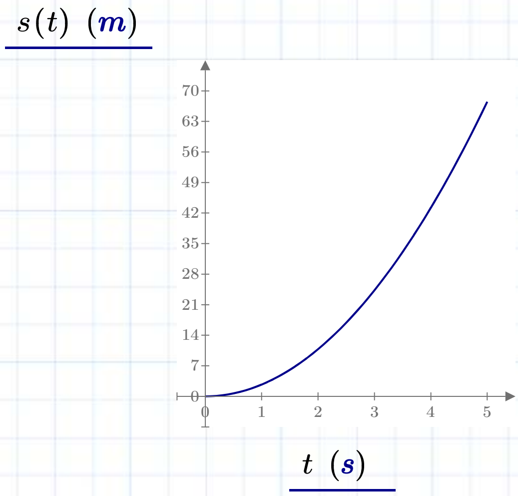


Aus dem Diagramm liest man $\Delta t := 5\ s$ und ungefähr $\Delta v := 27\ \frac{m}{s}$ heraus.

Daraus erhält man a und $s(t)$:

$$a := \frac{\Delta v}{\Delta t} = 5.4\ \frac{m}{s^2}$$ $$t := 0\ s, 0.1\ s..5\ s$$ $$s(t) := \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$





Lösung zu d) 2. Teil

a ist die Steigungsfunktion von *v*. Da die Geschwindigkeit linear steigt, ist die Beschleunigung konstant, und der Graph von *a* ist eine waagrechte Gerade.

v ist die Steigungsfunktion von *s*. Da die Geschwindigkeit linear zunimmt, steigt der Weg mit dem Quadrat der Zeit, und *s* ist eine quadratische Funktion.

Nur nichtkommerzielle Verwendung