Roland Pichler pc@htl-kapfenberg.ac.at

SRDP Aufgaben Cluster 3
Luftdruck 2

Drehteile (2)

Aufgabennummer: B-C3_11

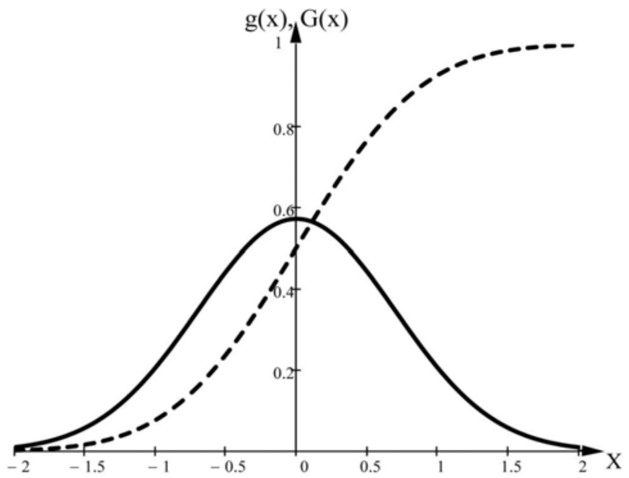
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Auf einer Drehmaschine werden Stahlzylinder gefertigt. Die Durchmesser der Zylinder sind annähernd normalverteilt mit den Parametern μ = 60,2 mm (Erwartungswert) und σ = 0,3 mm (Standardabweichung).

a) Bei einer Überprüfung wird ein Zylinder zufällig ausgewählt.
  – Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Durchmesser dieses Zylinders innerhalb eines Bereichs von 60,1 mm ± 0,6 mm liegt.

b) Zur Qualitätskontrolle werden Stichproben vom Umfang n = 5 genommen. Die Mittelwerte der Durchmesser der Stichproben werden aufgezeichnet.
  – Berechnen Sie denjenigen zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem erwartungsgemäß 90 % aller Stichprobenmittelwerte liegen.
  – Veranschaulichen Sie mithilfe der Dichtefunktion diesen symmetrischen Zufallsstreubereich und die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten.

c) Das untenstehende Diagramm stellt die Dichte- und die Verteilungsfunktion einer normalverteilten Zufallsvariablen dar.



  – Veranschaulichen Sie $G(1)$ mithilfe der Dichtefunktion im Diagramm.
  – Lesen Sie $G(1)$ aus dem Diagramm ab.
  – Lesen Sie aus dem Diagramm die Standardabweichung σ ab.
  – Erklären Sie, warum sich die Verteilungsfunktion für $x \to \infty$ asymptotisch dem Wert 1 annähert.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

SRDP Aufgaben Cluster 3, Luftdruck 2

Lösung zu a.

$\mu := 60.2$

$\sigma := 0.3$

Angabe von μ und σ ohne Einheiten, da die Mathcad die Wahrscheinlichkeiten mit Einheiten nicht berechnet werden können

$$P(59.5\ mm \le X \le 60.7\ mm) = G(60.7\ mm, \mu, \sigma) - G(59.5\ mm, \mu, \sigma)$$

$G(X, \mu, \sigma) := \text{pnorm}(X, \mu, \sigma)$

Die Mathcadfunktion $pnorm(X, \mu, \sigma)$ entspricht der Verteilungsfunktion $G(X, \mu, \sigma)$

$X_o := 60.7$ $\quad G(X_o, \mu, \sigma) = 95.221\%$

$X_u := 59.5$ $\quad G(X_u, \mu, \sigma) = 0.982\%$

$$G(X_o, \mu, \sigma) - G(X_u, \mu, \sigma) = 94.239\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Durchmesser eines zufällig ausgewählten Zylinders innerhalb eines Bereichs von 60,1 mm ± 0,6 mm liegt, beträgt etwa 94 %.

Lösung zu b. 1.Teil

$n := 5$ Stichprobenumfang

$\sigma_{SP} := \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ Stichprobenstandardabweichgung

μ Stichprobenmittelwert

Es gilt: $P(X \le OG) = 95\%$. Mithilfe des Lösungsblocks und der Verteilungsfunktion G(X) lässt sich die obere Grenze OG berechnen.

Schätzwerte

$OG := 60$

$G(OG, \mu, \sigma_{SP}) = 0.95$

$\mathbf{OG} := \mathbf{find}(\mathbf{OG}) = 60.421$

$P(X \le UG) = 5\%$ mit UG als unterer Grenze, oder $UG = \mu - (OG - \mu) = 2 \cdot \mu - OG$

Schätzwerte

$$UG := 60$$

$$G(UG, \mu, \sigma_{SP}) = 0.05$$

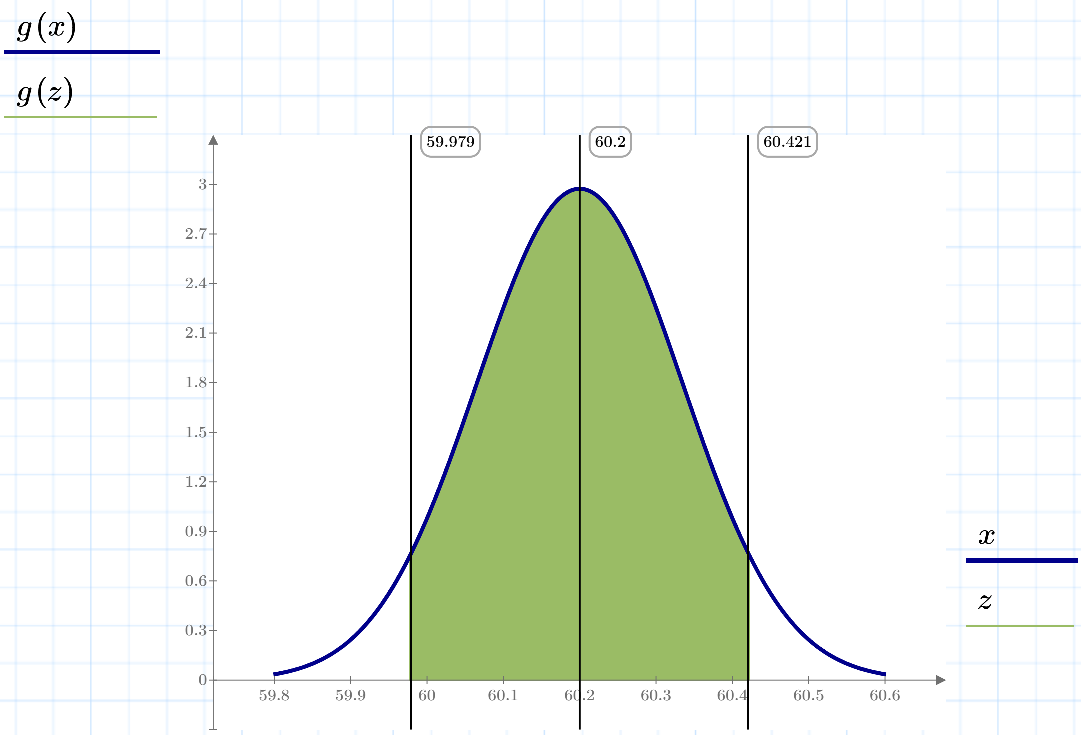
$$\mathbf{UG} := \mathbf{find}(\mathbf{UG}) = 59.979$$

$$\mu - (\mathbf{OG} - \mu) = 59.979$$

<u>*Lösung zu b. 2.Teil*</u>

$$g(x) := \mathrm{dnorm}(x, \mu, \sigma_{SP})$$

$x := \mu - 3 \cdot \sigma_{SP}, \mu - 3 \cdot \sigma_{SP} + 0.01 \cdot \sigma_{SP} .. \mu + 3 \cdot \sigma_{SP}$ $z := \mathbf{UG}, \mathbf{UG} + 0.01 \cdot \sigma .. \mathbf{OG}$



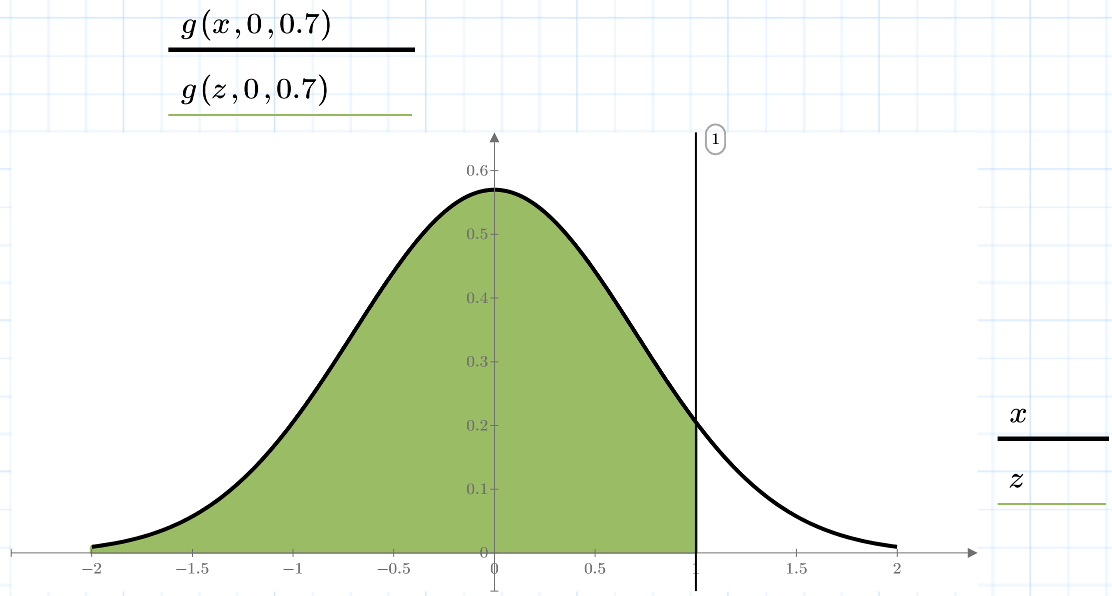
Vorbereitung für die Antworten zu c)

$x := -2, -1.99..2$ $\quad$ $z := -2, -1.99..1$

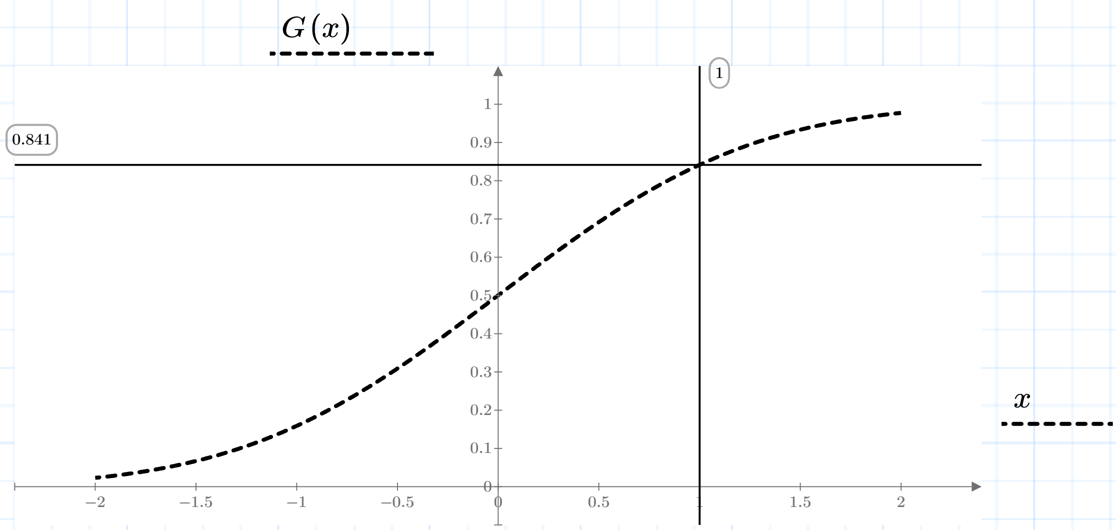
$G(x) := \text{cnorm}(x)$ $\quad$ standardisierte Normalverteilung

$g(x, \mu, \sigma) := \text{dnorm}(x, \mu, \sigma)$ $\quad$ Dichtefunktion

Lösung zu c. 1. Teil

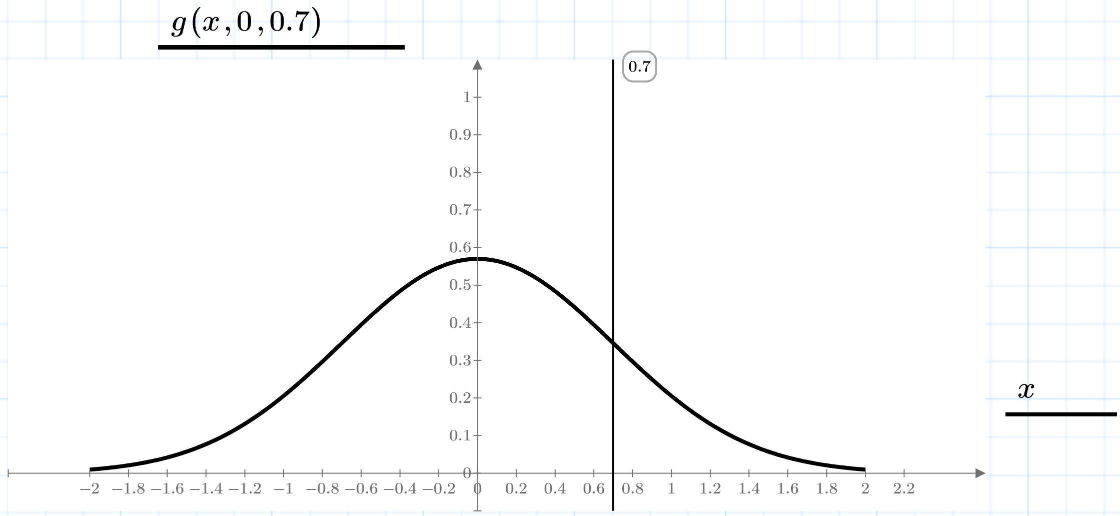


Lösung zu c. 2. Teil



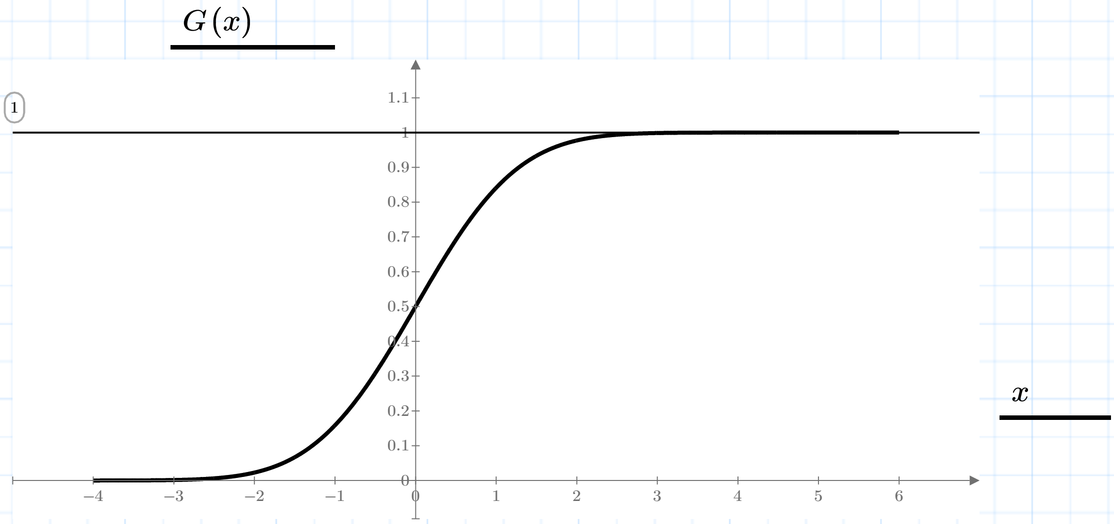
Lösung zu c. 3. Teil

Die Standarabweichung liest man als x-Koordinate des Wendepunktes ab: ca 0.7



Lösung zu c. 4. Teil

$x := -4, -3.999 .. 6$



Die Verteilungsfunktion $G(x)$ geht für $x \to \infty$ asymptotisch gegen 1, da der Funktionswert der Verteilungsfunktion die Fläche unter der Dichtefunktion angibt, und diese Fläche ist 1 (oder $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = 1$).