

DI Dr. techn. Klaus LEEB
klaus.leeb@schule.at

"Hydrodynamik - Leistung einer Pumpe"



- **Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:**
 - Lösen einer transzendenten Gleichung ("Formel von Colebrook"):**
Transzendente Gleichung: Gleichung, die sich nur in impliziter Form darstellen lässt. Lösungen können numerisch oder graphisch, jedoch nicht analytisch gefunden werden
- **Kurzzusammenfassung**
 - Bestimmung der Pumpenleistung einer Wasserversorgungsanlage**
 - Anwendung der Energiegleichung mit Verlusten und zugeführter Arbeit:**
"allgemeine Bernoulli-Gleichung"
- **Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand:**
 - 1) Verluste in Rohrleitungen
 - 2) Bernoulli-Gleichung
 - 3) Formel von Colebrook
 - 4) Verluste durch Einbauten in Rohrleitungen
 - Zeitaufwand: Ein gut vorbereiteter Schüler dürfte für diese Berechnung - ohne Formatierung und Kommentare - in etwa 1 1/2 h benötigen.**
- **Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):**
 - Strömungsmaschinen, Abteilung für Maschineningenieurwesen**
- **Mathcad-Version:** **Mathcad 14**
- **Literaturangaben:**
 - Willi Bohl "Strömungsmaschinen 1", Vogel-Buchreihe ISBN: 3 - 8023 - 1527- 8**
 - Steger "Technische Mechanik 2" Teubner-Verlag, ISBN: 3 - 519 - 16731 - X**
- **Anmerkungen bzw. Sonstiges:**
 -

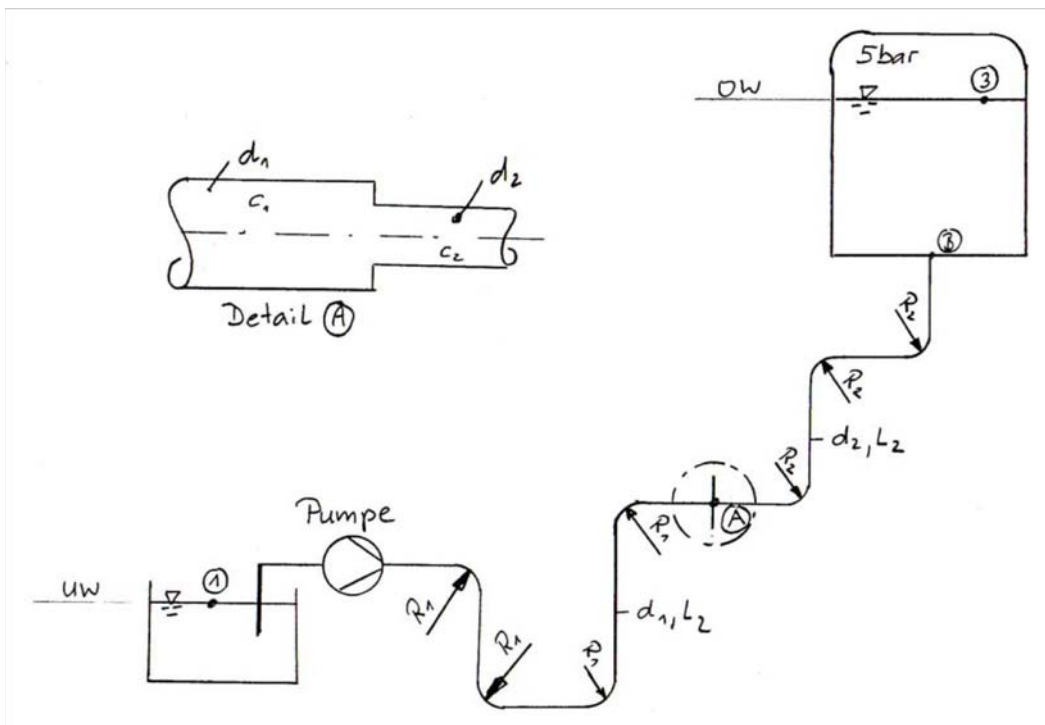


Bestimmung der Leistung einer Kreiselpumpe

Auslegung einer Wasserleitung mit Pumpe und Druckbehälter:

Eine Kreiselpumpe soll 7 m³/min Wasser von 20°C durch eine Stahlrohrleitung mit 0.05 mm Rauigkeit in einen 15m höher gelegenen Behälter fördern, der unter einem Überdruck von 5 bar steht. Die Rohrleitung 1 (von Unterwasser "UW" bis zur un stetigen Verengung im Punkt A) besteht aus einem 1.2km langen Rohr von 260mm Durchmesser mit 4 glatten 90°-Krümmern von 500mm Krümmungsradius. Nach der un stetigen Verengung im Punkt A schließt sich das Rohr 2 an - mit 180mm Durchmesser und 3 rauen 90° Krümmern von 700 mm Radius.

- a) Die Energiegleichung bzw. die "allgemeine Bernoulli-Gleichung" ist aufzustellen
- b) Berechnen Sie die Verluste in der Rohrleitung 1
- c) Berechnen Sie die Verluste in der Rohrleitung 2
- d) Berechnen Sie die Verluste der un stetigen Verengung im Punkt A
- e) Berechnen Sie den Austrittsverlust im Punkt B
- f) Ermitteln Sie den Gesamtverlust in der Rohrleitung
- g) Die erforderliche Pumpenleistung bei einem Pumpenwirkungsgrad von 89%



Angaben: Volumenstrom	$V_{\text{Punkt}} := 7 \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{min}}$	$p_1 := 1 \cdot \text{bar}$	$p_3 := 5 \cdot \text{bar} + 1 \cdot \text{bar}$	"Überdruck!"
Rohr 1: Durchmesser, Länge und Wandrauigkeit	$d_1 := 260 \cdot \text{mm}$	$L_1 := 1.2 \cdot \text{km}$	$k_1 := 0.05 \cdot \text{mm}$	
Krümmer	$R_1 := 500 \cdot \text{mm}$			
Rohr 2: Durchmesser, Länge und Wandrauigkeit	$d_2 := 180 \cdot \text{mm}$	$L_2 := 900 \cdot \text{m}$	$k_2 := 0.05 \cdot \text{mm}$	
Krümmer	$R_2 := 500 \cdot \text{mm}$			
Wirkungsgrad der Pumpe	$\eta_{\text{Pumpe}} := 89 \cdot \%$	Höhendifferenz UW-OW	$h_{13} := 15 \cdot \text{m}$	

a) Die Energiegleichung: angesetzt zwischen Unterwasser "UW" und Oberwasser "OW" (Punkt 1 und Punkt 3)

$$E_3 = E_1 + E_{zu} - E_{ab} \quad \text{"Die Energie am Ende eines Vorganges ist gleich der Energie am Anfang eines Vorganges vermehrt um die zugeführte Energie und vermindert um die abgeführte Energie"}$$

$$E_3 = \frac{p_3}{\rho \cdot g} + \frac{c_3^2}{2 \cdot g} + z_3 \quad \text{...die Energie am Punkt 3}$$

$$E_1 = \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{c_1^2}{2 \cdot g} + z_1 \quad \text{...die Energie am Punkt 1}$$

$$E_{zu} = H_{Pumpe} \quad \text{...die zugeführte Pumpenförderhöhe}$$

$$E_{ab} = \Sigma \Delta h_v \quad \text{...Summe aller Verluste zwischen 1 und 3 (Rohrreibungsverluste, Krümmer, stetige Verengung und plötzliche Erweiterung)}$$

$$\frac{p_3}{\rho \cdot g} + \frac{c_3^2}{2 \cdot g} + z_3 = \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{c_1^2}{2 \cdot g} + z_1 + H_{Pumpe} - \Sigma \Delta h_v \quad \text{(hier sind die Geschwindigkeiten } c_1 \text{ und } c_3 \text{ annäherung null, da es sich um große Wasseroberflächen handelt)}$$

$$H_{Pumpe} = \frac{p_3}{\rho \cdot g} + \frac{c_3^2}{2 \cdot g} + z_3 - \left(\frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{c_1^2}{2 \cdot g} + z_1 \right) + \Sigma \Delta h_v \quad \text{nach kurzer Umformung}$$

$$H_{Pumpe} = \frac{p_3 - p_1}{\rho \cdot g} + h_{13} + \Sigma \Delta h_v \quad \text{mit } z_3 - z_1 = h_{13}$$

gesucht ist Leistung der Pumpe (kann mit der Förderhöhe H_{Pumpe} der Pumpe bestimmt werden)

$$P_{Pumpe} = \frac{\rho \cdot g \cdot V_{Punkt} \cdot H_{Pumpe}}{\eta_{Pumpe}} \quad \text{erforderliche Pumpenleistung}$$

b) Verluste in der Rohrleitung 1

Rohrreibungsverlust $\Delta h_{v_Rohr1} = \zeta_{Rohr1} \cdot \frac{c_1^2}{2 \cdot g}$ $\zeta_{Rohr1} = \lambda_{Rohr1} \cdot \frac{L_1}{d_1}$

ζ_{Rohr1} Rohrreibungsbeiwert im Rohr 1 bezogen auf die Geschwindigkeitshöhe im Rohr1

λ_{Rohr1} ...Rohrreibungszahl im Rohr 1 (abhängig von der Rauigkeit des Rohres und der Reynoldszahl Re)

Formel von "Colebrook"
$$\lambda = \frac{1}{\left(2 \cdot \lg \left(\frac{2.51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{0.27}{\frac{d}{k}} \right)\right)^2}$$

Reynoldszahl $Re = \frac{c \cdot d}{\nu}$

dynamische Viskosität des Wassers bei 20°C

$$\nu := 1.0 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{m^2}{s}$$

Aus "Steger 2: Technische Mechanik, Tab 4.3 S288, 4.Auflage, Teubner"

Dichte des Wassers

$$\rho_{Wasser} := 998.2 \cdot \frac{kg}{m^3}$$

Die Geschwindigkeit im Rohr 1:

Kontinuitätsgleichung

$m_{Punkt} = \rho \cdot c \cdot A$ oder

$V_{Punkt} = c \cdot A$

$$c_1 := \frac{V_{Punkt}}{\left(\frac{d_1^2 \cdot \pi}{4}\right)}$$

$$c_1 = 2.197 \frac{m}{s}$$

$$Re_1 := \frac{c_1 \cdot d_1}{\nu}$$

$$Re_1 = 5.713 \times 10^5$$

Die Rohrreibungszahl λ_{Rohr1}

Schätzwert

$\lambda_{Rohr1} := 0.1$

Vorgabe

$$\lambda_{Rohr1} = \frac{1}{\left(2 \cdot \log \left(\frac{2.51}{Re_1 \cdot \sqrt{\lambda_{Rohr1}}} + \frac{0.27}{\frac{d_1}{k_1}} \right)\right)^2}$$

$\lambda_{Rohr1} := \text{Suchen}(\lambda_{Rohr1})$

$$\lambda_{Rohr1} = 0.015$$

Rohrreibungsverlust

$$\zeta_{Rohr1} := \lambda_{Rohr1} \cdot \frac{L_1}{d_1}$$

$$\zeta_{Rohr1} = 70.082$$

Rohrreibungsverlust im Rohr 1

$$\Delta h_{v_Rohr1} := \zeta_{Rohr1} \cdot \frac{c_1^2}{2 \cdot g}$$

$$\Delta h_{v_Rohr1} = 17.253 \text{ m}$$

Verluste in den Krümmern $\Delta h_{v_Krümmer1} = \zeta_{K1} \cdot \frac{c_1^2}{2 \cdot g}$ $\frac{R_1}{d_1} = 1.923$ glatter Rohrkrümmer

Widerstandsbeiwert $\zeta_{K1} := 0.3$ Aus "Steger 2: Technische Mechanik, Tab 4.108 S341, 4.Auflage, Teubner"

Verlust in einem Krümmer $\Delta h_{v_Krümmer1} := \zeta_{K1} \cdot \frac{c_1^2}{2 \cdot g}$ $\Delta h_{v_Krümmer1} = 0.074 \text{ m}$

Daraus ergeben sich die Verluste im Rohr 1:

$\Delta h_{Rohr1_ges} := \Delta h_{v_Rohr1} + 4 \cdot \Delta h_{v_Krümmer1}$ $\Delta h_{Rohr1_ges} = 17.549 \text{ m}$

c) Verluste in der Rohrleitung 2:

"analog zu Rohr1"

$c_2 := \frac{V_{\text{Punkt}}}{\left(\frac{d_2^2 \cdot \pi}{4}\right)}$ $c_2 = 4.585 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ $Re_2 := \frac{c_2 \cdot d_2}{\nu}$ $Re_2 = 8.252 \times 10^5$

Die Rohrreibungszahl λ_{Rohr2} Schätzwert $\lambda_{Rohr2} := 0.1$

Vorgabe $\lambda_{Rohr2} = \frac{1}{\left(2 \cdot \log\left(\frac{2.51}{Re_2 \cdot \sqrt{\lambda_{Rohr2}}} + \frac{0.27}{\frac{d_2}{k_2}}\right)\right)^2}$ $\lambda_{Rohr2} := \text{Suchen}(\lambda_{Rohr2})$ $\lambda_{Rohr2} = 0.016$

Rohrreibungsverlust $\zeta_{Rohr2} := \lambda_{Rohr2} \cdot \frac{L_2}{d_2}$ $\zeta_{Rohr2} = 78.014$

Rohrreibungsverlust im Rohr 2 $\Delta h_{v_Rohr2} := \zeta_{Rohr2} \cdot \frac{c_2^2}{2 \cdot g}$ $\Delta h_{v_Rohr2} = 83.608 \text{ m}$

Verluste in den Krümmern $\frac{R_2}{d_2} = 2.778$ rauher Rohrkrümmer

Widerstandsbeiwert $\zeta_{K2} := 0.265$ Aus "Steger 2: Technische Mechanik, Tab 4.108 S341, 4.Auflage, Teubner"

Verlust in einem Krümmer $\Delta h_{v_Krümmer2} := \zeta_{K2} \cdot \frac{c_2^2}{2 \cdot g}$ $\Delta h_{v_Krümmer2} = 0.284 \text{ m}$

Daraus ergeben sich die Verluste im Rohr 1:

$\Delta h_{Rohr2_ges} := \Delta h_{v_Rohr2} + 3 \cdot \Delta h_{v_Krümmer2}$ $\Delta h_{Rohr2_ges} = 84.46 \text{ m}$

d) Die Verluste der un stetigen Verengung im Punkt A

$$\Delta h_{v_Verengung} = \zeta_{Verengung} \cdot \frac{c_2^2}{2 \cdot g}$$

Abhängig von A_2/A_1

$$\frac{\frac{d_2^2 \cdot \pi}{4}}{\left(\frac{d_1^2 \cdot \pi}{4}\right)} = 0.479$$

Widerstandsbeiwert der Verengung

$$\zeta_{Verengung} := 0.3$$

Aus "Steger 2: Technische Mechanik, Tab 4.108 S341, 4.Auflage, Teubner"

$$\Delta h_{v_Verengung} := \zeta_{Verengung} \cdot \frac{c_2^2}{2 \cdot g}$$

$$\Delta h_{v_Verengung} = 0.322 \text{ m}$$

e) Berechnen Sie den Austrittsverlust im Punkt B

Beim Eintritt in einen großen Behälter wird die gesamte Geschwindigkeitsenergie des Wasserstrahles verwirbel
Daher ist der Widerstandsbeiwert 1

$$\Delta h_{\text{Austritt}} = \zeta_{\text{Austritt}} \cdot \frac{c_2^2}{2 \cdot g}$$

$$\zeta_{\text{Austritt}} := 1$$

$$\Delta h_{\text{Austritt}} := \zeta_{\text{Austritt}} \cdot \frac{c_2^2}{2 \cdot g}$$

$$\Delta h_{\text{Austritt}} = 1.072 \text{ m}$$

f) Der Gesamtverlust in der Rohrleitung zw "UW" und OW"

$$\Sigma \Delta h_v := \Delta h_{\text{Rohr1_ges}} + \Delta h_{v_Verengung} + \Delta h_{\text{Rohr2_ges}} + \Delta h_{\text{Austritt}}$$

$$\Sigma \Delta h_v = 103.402 \text{ m}$$

dies entspricht einem Druckverlust von: $p = \rho \cdot g \cdot h$

$$\Delta p_v := \rho_{\text{Wasser}} \cdot g \cdot \Sigma \Delta h_v$$

$$\Delta p_v = 10.122 \cdot \text{bar}$$

g) Die erforderliche Pumpenleistung bei einem Pumpenwirkungsgrad von 89%

$$H_{\text{Pumpe}} := \frac{p_3 - p_1}{\rho_{\text{Wasser}} \cdot g} + h_{13} + \Sigma \Delta h_v$$

$$H_{\text{Pumpe}} = 169.48 \text{ m}$$

erforderliche Pumpenförderhöhe

gesucht ist Leistung der Pumpe (kann mit der Förderhöhe H_{Pumpe} der Pumpe bestimmt werden)

$$P_{\text{Pumpe}} := \frac{\rho_{\text{Wasser}} \cdot g \cdot V_{\text{Punkt}} \cdot H_{\text{Pumpe}}}{\eta_{\text{Pumpe}}}$$

erforderliche Pumpenleistung

$$P_{\text{Pumpe}} = 217.477 \cdot \text{kW}$$