



DI Dr. techn. Klaus LEEB

klaus.leebe@surfeu.at

## Wärmeübertragung an einem Heizungsrohr



- **Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:**

**Verwendung von empirischen Gleichungen, Nusselt-Zahl, Wärmedurchgang**

- **Kurzzusammenfassung**

**Das Beispiel umfasst die Problematik einer nicht isolierten Wasserleitung in z.B. einem älteren Wohnhaus mit einem nicht regulierbaren Koks-Heizkessel. Die Wassertemperatur beträgt im angeführten Beispiel 80°C. Die Umgebungstemperatur der Luft 0°C. Es soll der Wärmeverlust der nichtisolierten Leitung demjenigen einer mit einer Polyurethanschicht isolierten Leitung gegenübergestellt werden. Aus den Ergebnissen kann und soll der Sinn einer Isolierung abgeleitet und veranschaulicht werden. Weiters soll dem angehenden Absolventen die Anwendung der Nusselt-Zahl nähergebracht werden.**

- **Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand:**

**Die Wärmelehre gehört zweifelsohne zu den in der Berechnung aufwendigsten (Iterationen) und im Gedankengang zu den am schwersten verständlichen Gebieten der Mechanik. MathCAD bietet hier eine fast einzigartige Möglichkeit auszuprobieren, was passiert, wenn man etwas an den bestimmenden Parametern ändert, ohne an den langen umständlichen händischen Rechnungen zu verzweifeln. Umso mehr kann dieses Stoffgebiet den Schülern wesentlich leichter nähergebracht werden, wenn die Aufgabenstellungen mit MathCAD bearbeitet werden.**

- **Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):**

**z.B: Angewandte Mathematik, 5.Jahrgang, alle Abteilungen**

- **Mathcad-Version:**

**Mathcad 2001**

- **Literaturangaben:**

**K. Langeheinecke "Thermodynamik für Ingenieure", ISBN 3 - 528 - 04785 - 2, VIEWEG  
Steger "Technische Mechanik 3", Lehrbuch**

- **Anmerkungen bzw. Sonstiges:**

**Diese Aufgabe wurde vom Autor bereits als Reifeprüfungsaufgabe gestellt**



**Wasserabkühlung in einem Rohr mit Luft**

$$\text{bar} := 10^5 \cdot \text{Pa} \quad \text{Nm} := \text{N} \cdot \text{m} \quad \text{kJ} := 10^3 \cdot \text{J} \quad T_0 := 273.15 \cdot \text{K} \quad ^\circ\text{C} := \text{K}$$

In einer nicht isolierten horizontalen 1/2" Rohrleitung aus Kupfer ( $\varnothing D_{\text{innen}} = 12.7\text{mm}$ , Wandstärke  $s = 0.5\text{mm}$ , Länge  $L = 180\text{m}$ ) strömt Wasser mit einer Eintrittstemperatur von  $80^\circ\text{C}$  mit einer Geschwindigkeit von  $0.35\text{m/s}$ . Die Umgebungstemperatur  $t_u$  beträgt  $0^\circ\text{C}$ .

Die Wärmeübergangszahl luftseitig  $\alpha_a$  beträgt  $9\text{W/m}^2\text{K}$ .

Man berechne und zeichne:

- Skizzieren Sie das Temperatur – Rohrlängen Diagramm mit allen Größen
- Die Nusselt-Zahl  $Nu_i$ ,  $\alpha_i$ , die Wärmedurchgangszahl  $k$
- Die Austrittstemperatur  $t_a$  nach der Länge  $L$ , und den Wärmeverlust  $\dot{Q}_V$
- Welche Austrittstemperatur  $t_{a1}$  und Wärmeverlust  $\dot{Q}_{V1}$  stellt sich ein, wenn das Rohr mit einer 12mm dicken Isolierschicht aus Polyurethan  $\lambda_{\text{PII}} = 0.025\text{W/mK}$  umhüllt wird ?

**Wasser**

Wassertemperatur  $T_{\text{Wasser}} := (80 + 273.15) \cdot \text{K}$

Geschwindigkeit lt Angabe  $c_{\text{Wasser}} := 0.35 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Dichte  $\rho_{\text{Wasser}} := 988 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

kinematische Viskosität  $\nu_{\text{Wasser}} := 0.365 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$

Prandtl Zahl  $Pr := 2.23$

Wärmeleitfähigkeit Wasser  $\lambda_{\text{Wasser}} := 0.667 \cdot \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$

spezif. Wärmekapazität  $c_{p\text{Wasser}} := 4180 \cdot \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$

**Heizungsrohr**

Länge  $L_{\text{Rohr}} := 180 \cdot \text{m}$

Innendurchmesser  $d_{\text{innen}} := 12.7\text{mm}$

Wandstärke  $s_{\text{Rohr}} := 0.5 \cdot \text{mm}$

Aussendurchmesser  $d_{\text{ausser}} := d_{\text{innen}} + 2 \cdot s_{\text{Rohr}} \quad d_{\text{ausser}} = 13.7\text{mm}$

Wärmeleitfähigkeit Kupfer  $\lambda_{\text{Kupfer}} := 393 \cdot \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$

**Luft**

Temperatur  $T_{\text{Luft}} := (0 + 273.15) \cdot \text{K}$

Wärmeübergangszahl aussen  $\alpha_a := 9 \cdot \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$

Berechnung der Radien des Rohres  $r_i := d_{\text{innen}} \cdot 0.5 \quad r_a := r_i + s_{\text{Rohr}} \quad r_i = 6.35\text{mm} \quad r_a = 6.85\text{mm}$

### Wärmeübergangszahl innen

hängt von der Reynoldszahl und von der Nusseltzahl ab.

Gleichungen siehe (Gabernig, oder Langeheinecke " Thermodynamik für Ingenieure")

$$\text{Reynoldszahl } Re := \frac{c_{\text{Wasser}} \cdot d_{\text{innen}}}{v_{\text{Wasser}}} \quad \text{Re} = 12178 \quad \text{turbulente Strömung, da } > 2300 !$$

### Nusselt - Zahl für turbulente Rohrströmungen lt. Langeheinecke

$$\xi := (1.82 \cdot \log(Re) - 1.64)^{-2} \quad \sim \text{Rohrreibungszahl Prandtl - Colebrook} \quad \xi = 0.02977$$

$$Nu_{\text{Turbulent}} := \frac{\frac{\xi}{8} \cdot (Re - 1000) \cdot Pr}{1 + 12.7 \cdot \left(\frac{\xi}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{Pr} - 1\right)} \cdot \left[ 1 + \left(\frac{d_{\text{innen}}}{L_{\text{Rohr}}}\right)^{\frac{2}{3}} \right] \quad Nu_{\text{Turbulent}} = 60.039$$

$$\text{Wärmeübergangszahl innen } Nu = \frac{\alpha \cdot d}{\lambda} \quad \alpha_i := \frac{Nu_{\text{Turbulent}} \cdot \lambda_{\text{Wasser}}}{d_{\text{innen}}} \quad \alpha_i = 3.153 \times 10^3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

### Wärmedurchgangszahl (Grundlagenwissen, oder Steger "Technische Mechanik 3")

$$k_{\text{Rohr}} := \frac{2 \cdot \pi}{\frac{1}{\alpha_i \cdot r_i} + \frac{1}{\lambda_{\text{Kupfer}}} \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) + \frac{1}{\alpha_a \cdot r_a}} \quad k_{\text{Rohr}} = 0.3862 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$$

### Massenstrom Wasser (mit Kontinuitätsgleichung)

$$A_{\text{Rohr}} := \frac{d_{\text{innen}}^2 \cdot \pi}{4} \quad m_{\text{Punkt}} := c_{\text{Wasser}} \cdot \rho_{\text{Wasser}} \cdot A_{\text{Rohr}} \quad m_{\text{Punkt}} = 157.698 \frac{\text{kg}}{\text{h}}$$

### Berechnung der Austrittstemperatur des Wassers

Das Wasser 80° kühlt sich an der Umgebung 0° ab. Ansatz: Die Wärme, die durch Wärmedurchgang an die Umgebung abgegeben wird, muss gleich der Wärme sein, die das Wasser abgibt --> dadurch kühlt es sich ab.

Die übertragene Wärme muss hierbei wie bei einem Wärmetauscher (Rohr an Luft ist einer, wobei die Luftseite eine konstante Temperatur aufweist) mit logarithmischer **Temperaturdifferenz** gerechnet werden. Dadurch ist gewährleistet, dass keine physikalisch sinnlose (z.B. Austrittstemperatur des Wassers liegt unter der Lufttemperatur) auftritt.

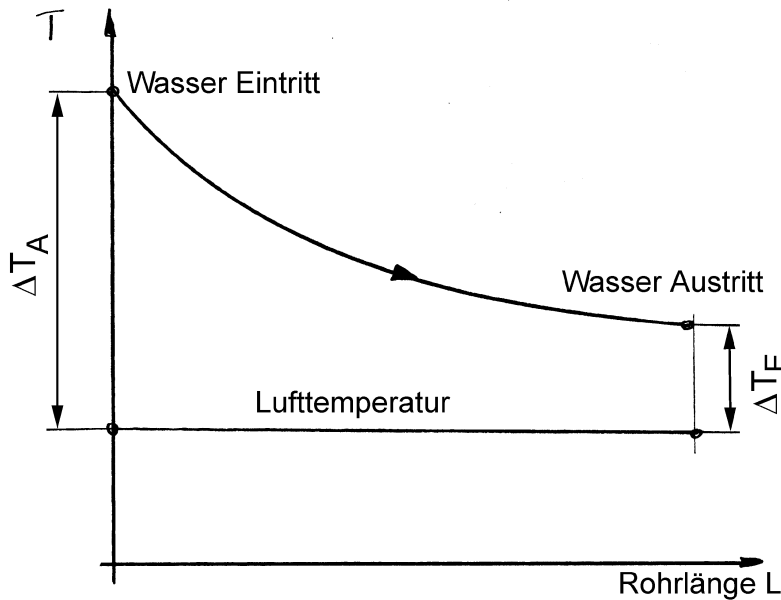
Vom Wasser abgegebener Wärmestrom

$$Q = m_{\text{Punkt}} \cdot c_{p\text{Wasser}} \cdot (T_{\text{Wasser}} - T_2)$$

An die Luft durch Wärmedurchgang übertragener Wärmestrom  $Q = k_{\text{Rohr}} \cdot L_{\text{Rohr}} \cdot \Delta T_M$

Logarithmische Temperaturdifferenz (lt. Steger 3)

$$\Delta T_M = \frac{\Delta T_E - \Delta T_A}{\ln\left(\frac{\Delta T_E}{\Delta T_A}\right)}$$



**Wärmetauscher - Diagramm**

Eintrittstemperaturdifferenz

$$\Delta T_E = T_{\text{Wasserein}} - T_{\text{Luft}}$$

Austrittstemperaturdifferenz

$$\Delta T_A = T_{\text{Wasseraus}} - T_{\text{Luft}}$$

Berechnung der gesuchten **Austrittstemperatur**  $T_{\text{Austritt}}$  des Wassers nach der Rohrlänge L

Die **Lösung erfolgt mit einem "Lösungsblock"**: Schätzwert für  $T_{\text{Austritt}}$  --> Vorgabe --> Gleichung --> suchen ()

(Die beiden Wärmeströme werden dabei gleich gesetzt)

Schätzwert für Austrittstemperatur  $T_{\text{Austritt}} := 273 \cdot \text{K} + 54 \cdot \text{K}$

Vorgabe

$$m_{\text{Punkt}} \cdot c_{p\text{Wasser}} \cdot (T_{\text{Wasser}} - T_{\text{Austritt}}) = k_{\text{Rohr}} \cdot L_{\text{Rohr}} \cdot \frac{T_{\text{Wasser}} - T_{\text{Austritt}}}{\ln\left(\frac{T_{\text{Wasser}} - T_{\text{Luft}}}{T_{\text{Austritt}} - T_{\text{Luft}}}\right)}$$

$T_{\text{Austritt}} := \text{Suchen}(T_{\text{Austritt}})$

Austrittstemperatur in [K]

$T_{\text{Austritt}} = 327.88 \text{ K}$

**Umrechnung auf °C:** Funktioniert nur über eine "Verschiebung"  
(°C werden aus K durch Subtraktion des absoluten Nullpunkts errechnet)

Austrittstemperatur in [°C]

$$t_{\text{Austritt}} := T_{\text{Austritt}} - T_0$$

$$t_{\text{Austritt}} = 54.73 \text{ °C}$$

logarithmische Temp.diff.

$$\Delta T_M := \frac{T_{\text{Wasser}} - T_{\text{Austritt}}}{\ln\left(\frac{T_{\text{Wasser}} - T_{\text{Luft}}}{T_{\text{Austritt}} - T_{\text{Luft}}}\right)}$$

$$\Delta T_M = 66.567 \text{ °C}$$

Wärmestrom über Rohr

$$Q_{\text{Tauscher}} := k_{\text{Rohr}} \cdot L_{\text{Rohr}} \cdot \Delta T_M$$

$$Q_{\text{Tauscher}} = 4.627 \text{ kW}$$

vom Wasser abgegebener  
Wärmestrom

$$Q_{\text{Wasser}} := -\dot{m}_{\text{Punkt}} \cdot c_{p\text{Wasser}} \cdot (T_{\text{Austritt}} - T_{\text{Wasser}})$$

$$Q_{\text{Wasser}} = 4.627 \text{ kW}$$

Interpretation: Der abgegebene Wärmestrom (=Wärmeverlust) ist sehr groß. Das Wasser kühlt sich sehr stark ab.

Abhilfe: Das Rohr wird mit einer Polystyrolschicht isoliert (wärmegeämmt.)

### b) Mit Isolierschicht

**Polystyrol:**

Stärke der Isolierschicht

$$s_{\text{Polystyrol}} := 12 \cdot \text{mm}$$

$$r_{a\text{PS}} := r_a + s_{\text{Polystyrol}} \quad r_{a\text{PS}} = 18.85 \text{ mm}$$

Wärmeleitfähigkeit Polystyrol

$$\lambda_{\text{Polystyrol}} := 0.025 \cdot \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$$

(In der Wärmedurchgangszahl kommt ein Term dazu)

$$k_{\text{Rohr\_isolier}} := \frac{2 \cdot \pi}{\frac{1}{\alpha_i \cdot r_i} + \frac{1}{\lambda_{\text{Kupfer}}} \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) + \frac{1}{\lambda_{\text{Polystyrol}}} \cdot \ln\left(\frac{r_{a\text{PS}}}{r_a}\right) + \frac{1}{\alpha_a \cdot r_a}}$$

$$k_{\text{Rohr\_isolier}} = 0.1107 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$$

Berechnung der **Wasseraustrittstemperatur**  $T_{\text{Austritt\_isolier}}$  mit Isolierschicht

Schätzwert

$$T_{\text{Austritt\_isolier}} := 300 \cdot \text{K}$$

Vorgabe

$$\dot{m}_{\text{Punkt}} \cdot c_{p\text{Wasser}} \cdot (T_{\text{Wasser}} - T_{\text{Austritt\_isolier}}) = k_{\text{Rohr\_isolier}} \cdot L_{\text{Rohr}} \cdot \frac{T_{\text{Wasser}} - T_{\text{Austritt\_isolier}}}{\ln\left(\frac{T_{\text{Wasser}} - T_{\text{Luft}}}{T_{\text{Austritt\_isolier}} - T_{\text{Luft}}}\right)}$$

$$T_{\text{Austritt\_isolier}} := \text{Suchen}(T_{\text{Austritt\_isolier}})$$

Austrittstemperatur in [K]  $T_{\text{Austritt\_isoliert}} = 344.901 \text{ K}$

Austrittstemperatur in [°C]  $t_{\text{Austritt\_isoliert}} := T_{\text{Austritt\_isoliert}} - T_0$   $t_{\text{Austritt\_isoliert}} = 71.751 \text{ °C}$

logarithmische Temp.diff.  $\Delta T_{M\_neu} := \frac{T_{\text{Wasser}} - T_{\text{Austritt\_isoliert}}}{\ln\left(\frac{T_{\text{Wasser}} - T_{\text{Luft}}}{T_{\text{Austritt\_isoliert}} - T_{\text{Luft}}}\right)}$   $\Delta T_{M\_neu} = 75.801 \text{ °C}$

Wärmestrom über Rohr mit Isolierschicht  $Q_{\text{Tauscher\_neu}} := k_{\text{Rohr\_isoliert}} \cdot L_{\text{Rohr}} \cdot \Delta T_{M\_neu}$   $Q_{\text{Tauscher\_neu}} = 1.51 \text{ kW}$

Wärmestrom über Rohr ohne Isolierschicht  $Q_{\text{Tauscher}} = 4.627 \text{ kW}$

relative\_Ersparnis :=  $\frac{Q_{\text{Tauscher}} - Q_{\text{Tauscher\_neu}}}{Q_{\text{Tauscher}}}$   $\text{relative\_Ersparnis} = 67.359 \%$

**Anmerkung:** Mit der Isolierschicht aus Polystyrol kann man im obigen Beispiel den Wärmeverlust um ca 68% reduzieren.

**Aufgabenstellung:** Selbst ausprobieren, welche Parameter (Wärmeleitfähigkeit, Dicke der Isolierschicht, Länge des Rohres, Temperaturen des Wassers und der Luft ...) auf den Wärmeverlust den größten Einfluss haben.

