DI Dr. techn. Klaus LEEB **klaus.leeb@surfeu.at**

Betriebspunkt einer Pumpe

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Ausgleichskurve durch Pumpenkennline (numerisches Vorliegen der Kennlinie, zur mathematischen Weiterverarbeitung)

- Kurzzusammenfassung

  Berechnen des Betriebspunktes einer Anlage: Dieser ergibt sich aus dem Schnittpunkt der Anlage (Rohrleitungssystem mit Verlusten) und der Kennline der Pumpe, die in Diagrammform vorliegt. Daraus erst kann der tatsächlich von der Pumpe gelieferte Volumenstrom ermittelt werden.

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand:

  Importieren von Daten: Die Daten (Pumpenkennlinie) liegen punktweise (Förderhöhe mit dazugehörigem Volumenstrom und NPSH-Wert) in einer Exceltabelle vor.

  Ausgleichskurve: Es wird ein kubischer Spline durch die Punkte gelegt. Damit kann die Pumpenkennlinie wie eine Funktion behandelt werden.

  Betriebspunkt: Schneiden der Pumpenkennline mit der Anlagenkennlinie (Funktion "suchen")

  Kavitation und NPSH-Wert: Aufstellungshöhe der Pumpe, damit sie nicht kavitiert.

  **Zeitaufwand: Ein gut vorbereiteter Schüler dürfte für diese Aufgabenstellung in etwa 1 h benötigen, bei Verwendung aller zugelassenen Unterlagen und Bücher.
  (Voraussetzung ist jedoch, dass er die verwendeten Funktionen beherrscht, und weiss was er macht)**

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):
  Fachtheorie: Strömungsmaschinen, Abteilung für Maschineningenieurwesen

- Mathcad-Version: **Mathcad 2001**

- Literaturangaben:

  Willi Bohl "Strömungsmaschinen 1", Vogel-Buchreihe ISBN: 3 - 8023 - 1527- 8
  Steger "Technische Mechanik 2" Teubner-Verlag, ISBN: 3 - 519 - 16731 - X

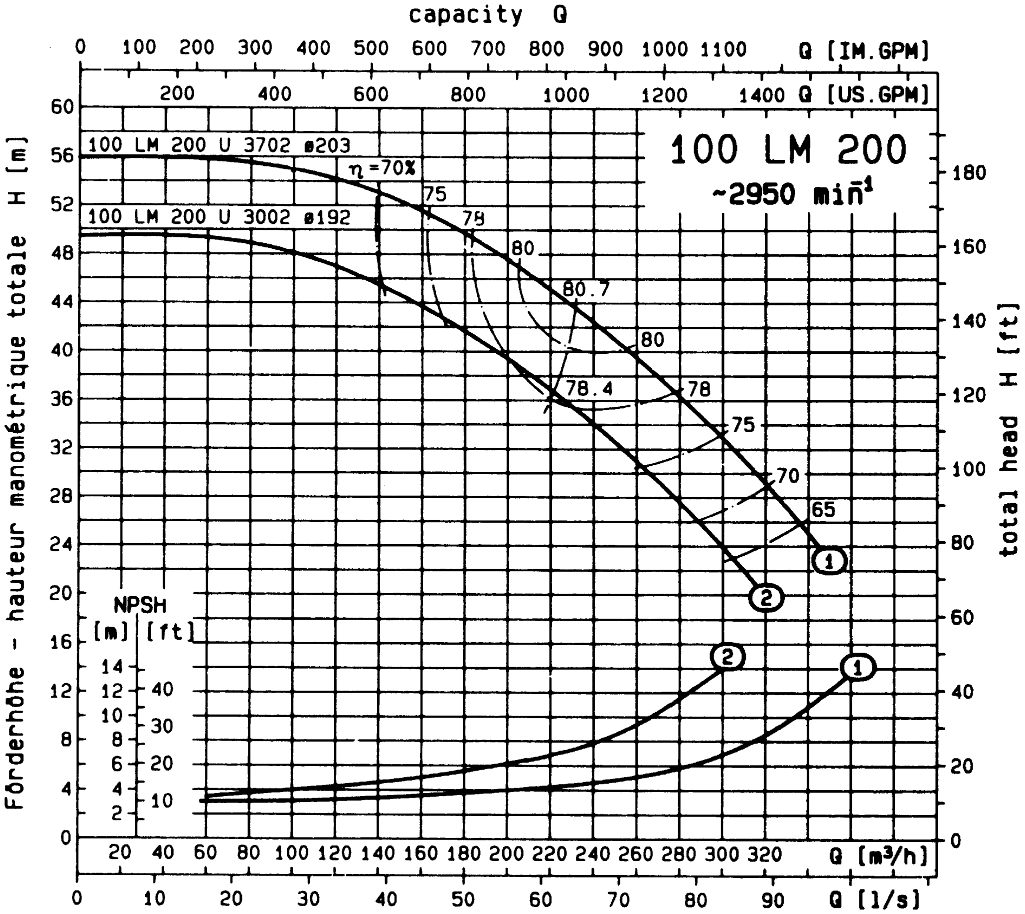
- Anmerkungen bzw. Sonstiges:

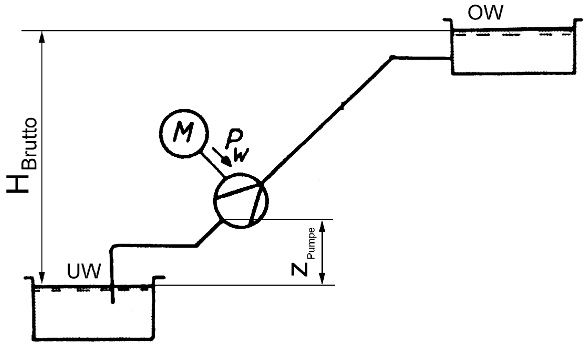
  Diese Aufgabenstellung kommt sehr häufig in der Praxis vor. Wegen der Pumpenkennlinie in Diagrammform wird das mehrfache Wiederholen (Optimieren) der Auslegungsschritte (Verändern der Leitungsdurchmesser, Aufstellungshöhe der Pumpe usw.) sehr mühsam. Es empfiehlt sich daher ein kleines "Programm" zu schreiben.

Gegeben ist die Kennlinie der Pumpe 100 LM 200 – DN125/100 der Fa. Vogelpumpen für den Laufrad-durchmesser 203mm. Die Druckverluste in den Abschnitten Unterwasser bis Saugstutzen und Druckstut-zen Oberwasser sind auf die jeweilige Strömungsgeschwindigkeit im Rohr zu beziehen. Diese Anlage soll im Hochgebirge zur Wasserversorgung dienen.

Förderhöhe [m]	56.00	55.76	55.61	54.78	52.59	50.16	46.26	40.90	35.55	28.73	20.45
Volumenstrom [l/s]	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
NPSH [m]	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	4	4.5	5	6.25	9	14

Pumpengröße 100 LM 200 - DN 125/100



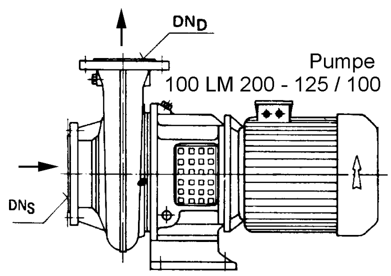


Angaben:

$z_{UW} = 250m \quad H_{Brutto} = 35m$

$\zeta_{UW-Saug} = 9.2 \quad \zeta_{Druck\text{-}OW} = 3.2$

Wassertemperatur $t_{Wasser} = 70°C$



Das Kennfeld der Pumpe ist punktweise in der Exceltabelle "*Kennfeld Pumpe 100 LM 200 Laufrad 203mm.xls*" vorhanden.

Importieren von Daten: Menü Einfügen --> Komponente --> Daten lesen/schreiben --> weiter --> Daten aus einer Datei lesen --> weiter --> Excel --> durchsuchen --> auf die oben angeführte Datei klicken --> Fertigstellen
Name für die Matrix eingeben "Kennfeld"

$$Kennfeld := \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 56 & 0 & 3.5 \\ 55.76 & 10 & 3.5 \\ 55.61 & 20 & 3.5 \\ 54.78 & 30 & 3.5 \\ 52.59 & 40 & 3.5 \\ 50.16 & 50 & 4 \\ 46.26 & 60 & 4.5 \\ 40.9 & 70 & 5 \\ 35.55 & 80 & 6.25 \\ 28.73 & 90 & 9 \\ 20.45 & 100 & 14 \end{pmatrix}$$

Bestimmen der Anzahl der Matrixzeilen: mit **zeilen( )**

$n_{Zeilen} := zeilen(Kennfeld)$ $n_{Zeilen} = 13$

Definition von Litern: $Liter := l$ Man kann oft die Zahl 1 von l nicht unterscheiden ! (Je nach Schriftart)

$Förderhöhe := Kennfeld^{\langle 0 \rangle} \cdot m$ $Volumenstrom := Kennfeld^{\langle 1 \rangle} \cdot \frac{Liter}{s}$ $NPSH := Kennfeld^{\langle 2 \rangle} \cdot m$

Ausgleichskurve: mit der Funktion regress( ) (Dazu muss der Volumenstrom und die Förderhöhe dimensionslos gemacht werden)

$k := 3$ Gibt die Ordnung des Ausgleichspolynoms an

Ermitteln der Koeffizienten z: $z := regress\left(Volumenstrom \cdot \frac{s}{m^3}, Förderhöhe \cdot \frac{1}{m}, k\right)$

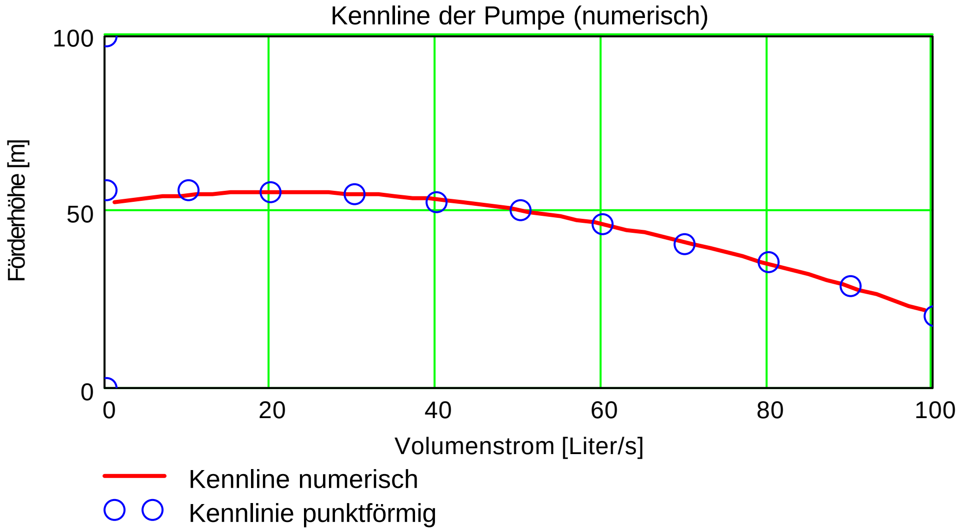
Definition einer Bereichsvariable für der Volumenstrom V_{Punkt} der Ausgleichskurve

$V_{Beginn} := 1 \cdot \frac{Liter}{s}$ $\Delta V_{Punkt} := 2 \cdot \frac{Liter}{s}$ $V_{Ende} := 100 \cdot \frac{Liter}{s}$

$V_{Punkt} := V_{Beginn}, \left(V_{Beginn} + \Delta V_{Punkt}\right) .. V_{Ende}$

Anpassungsfunktion: mit Funktion **interp( )** (Das ist die numerisch vorliegende Pumpenkennlinie, die weiterhin verwendet wird)

$H_{Pumpe}(V_{Punkt}) := \text{interp}(z, \text{Volumenstrom}, \text{Förderhöhe}, V_{Punkt})$ **= Kennlinie der Pumpe**



Anm: Ausprobieren, ob die Anpassungsfunktion entspricht: Eingabe eines Volumenstroms "zwischen" den Stützpunkten und Kontrolle anhand der Kennline im Diagramm der Fa. Vogelpumpen

z.B.: $H_{Pumpe}\left(73.5\,\frac{\text{Liter}}{\text{s}}\right) = 39.121\,\text{m}$

Bestimmung der Anlagenkennlinie: $H_{Anlage} = f(V_{Punkt})$

Dazu muss man die Energiegleichung ("Bernoulli mit Verlusten" vom Unterwasser bis zum Oberwasser ansetzen.

$$\frac{p_{ow}}{\rho_{Wasser} \cdot g} + \frac{c_{ow}^2}{2 \cdot g} + z_{ow} = \frac{p_{uw}}{\rho_{Wasser} \cdot g} + \frac{c_{uw}^2}{2 \cdot g} + z_{uw} + H_{Anlage} - \Sigma\Delta h_{Verlust}$$

Da $p_{uw} \sim p_{ow}$ und $c_{uw} = c_{ow} = 0$ m/s ist folgt:

$$H_{Anlage} = (z_{ow} - z_{uw}) + \Sigma\Delta h_{Verlust}$$

Die Verlustbeiwerte für Druckrohr und Saugrohr sind oben angegeben (ansonsten sind sie zu berechnen). Sie werden auf die Geschwindigkeitshöhe im jeweiligen Rohrabschnitt bezogen.

$$\Sigma\Delta h_{Verlust} = \zeta_{Druckleitung} \cdot \frac{c_{Druckleitung}^2}{2 \cdot g} + \zeta_{Saugleitung} \cdot \frac{c_{Saugleitung}^2}{2 \cdot g} = \frac{\zeta_1}{2 \cdot g \cdot A_{R1}^2} \cdot V^2 + \frac{\zeta_2}{2 \cdot g \cdot A_{R2}^2} \cdot V^2$$

Mit der **Kontinuitätsgleichung:** $m_{Punkt} = \rho_{Wasser} \cdot c_{Rohr} \cdot A_{Rohr}$ oder $V_{Punkt} = c_{Rohr} \cdot A_{Rohr}$

folgt
$$\Sigma\Delta h_{Verlust} = \frac{\zeta_{Druckleitung}}{2 \cdot g \cdot A_{Druckleitung}^2} \cdot V_{Punkt}^2 + \frac{\zeta_{Saugleitung}}{2 \cdot g \cdot A_{Saugleitung}^2} \cdot V_{Punkt}^2$$

Damit sieht die **Anlagenkennlinie** wie folgt aus:

$$H_{Anlage}(V_{Punkt}) = (z_{ow} - z_{uw}) + \left(\frac{\zeta_{Druckleitung}}{2 \cdot g \cdot A_{Druckleitung}^{2}} + \frac{\zeta_{Saugleitung}}{2 \cdot g \cdot A_{Saugleitung}^{2}}\right) \cdot V_{Punkt}^{2}$$

Anm: Sie stellt eine Parabel 2. Ordnung dar. Ihre "Steilheit" hängt von den Verlusten ab!

Berechnung des Betriebspunktes mit konkreten Werten:

Die Werte sind entnommen aus: *Steger 2 "Technische Mechanik 2"* und *Böswirth "Techn. Strömungslehre"*

Konkrete Werte:

Saugleitung: Rohrleitungsdurchmesser $d_{Saugleitung} := 125 \cdot mm$

Gesamtverlustbeiwert $\zeta_{Saugleitung} := 9.2$

Druckleitung: Rohrleitungsdurchmesser $d_{Druckleitung} := 100 \cdot mm$

Gesamtverlustbeiwert $\zeta_{Druckleitung} := 3.2$

Geodätische Höhen: $z_{uw} := 250 \cdot m$ $z_{ow} := 285 \cdot m$

Luftdruck in 250 m $bar := 10^{5} \cdot Pa$ (Definition der Nicht - SI-Einheit "bar") $g := 9.81 \cdot \frac{m}{s^{2}}$

$p_{uw} := 0.984 \cdot bar$ $p_{ow} := 0.984 \cdot bar$ (Annahme, dass der Luftdruck gleich sei)

Werte für das Wasser: bei 70°C $\rho_{Wasser} := 977.7 \cdot \frac{kg}{m^{3}}$ $p_{Dampfdruck} := 0.3116 \cdot bar$

Durchströmte Querschnitte: $A_{Saugleitung} := \frac{d_{Saugleitung}^{2} \cdot \pi}{4}$ $A_{Druckleitung} := \frac{d_{Druckleitung}^{2} \cdot \pi}{4}$

$$H_{Anlage}(V_{Punkt}) := \frac{p_{ow} - p_{uw}}{\rho_{Wasser} \cdot g} + (z_{ow} - z_{uw}) + \left(\frac{\zeta_{Saugleitung}}{2 \cdot g \cdot A_{Saugleitung}^{2}} + \frac{\zeta_{Druckleitung}}{2 \cdot g \cdot A_{Druckleitung}^{2}}\right) \cdot V_{Punkt}^{2}$$

Der Betriebspunkt ist der Schnittpunkt der beiden Kurven: $H_{Pumpe}=H_{Anlage}$ --> Volumenstrom

$$H_{Pumpe}(V_{Punkt}) := interp(z, Volumenstrom, Förderhöhe, V_{Punkt})$$

Schätzwert für den Volumenstrom eingeben: (Der Gleichungslöser benötigt ähnlich wie das Newton'sche Verfahren einen Startwert) -->

Lösung mit "Lösungsblock": Schätzwert --> Vorgabe --> Gleichung --> Funktion "suchen()"

$V_{Betriebspunkt} := 20 \cdot \frac{Liter}{s}$

Vorgabe

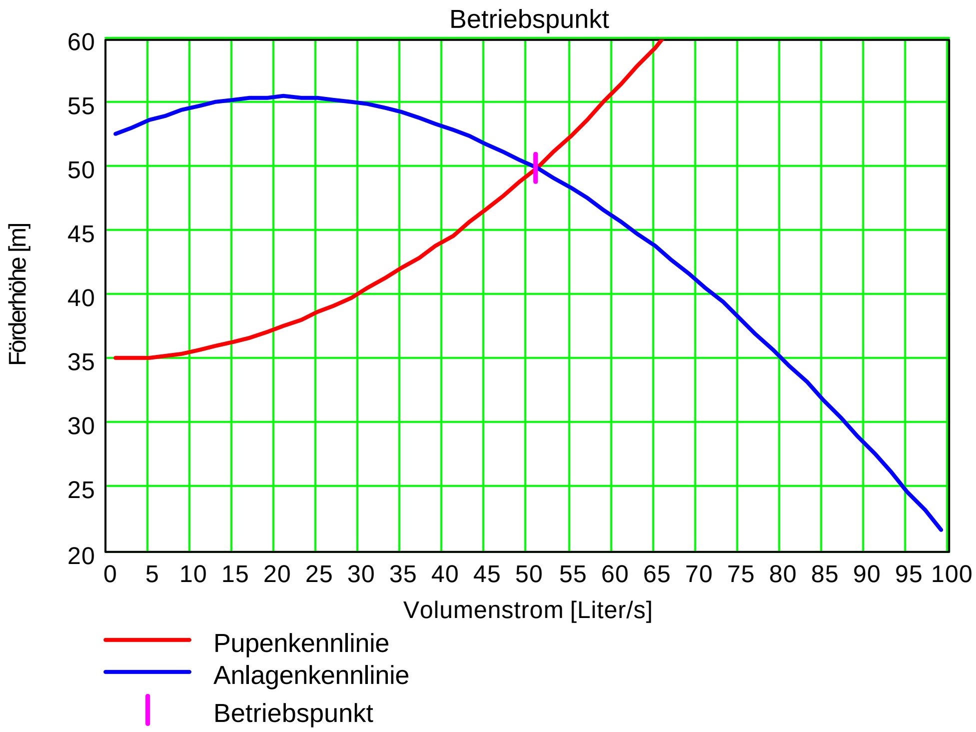
$$H_{Pumpe}(V_{Betriebspunkt}) = H_{Anlage}(V_{Betriebspunkt})$$

$V_{Betriebspunkt} := \text{Suchen}\left(V_{Betriebspunkt}\right)$

Betriebspunkt

Förderhöhe $H_{Betriebspunkt} := H_{Pumpe}\left(V_{Betriebspunkt}\right)$ $H_{Betriebspunkt} = 49.914\,\text{m}$

Volumenstrom $V_{Betriebspunkt} = 50.894\,\frac{\text{Liter}}{\text{s}}$



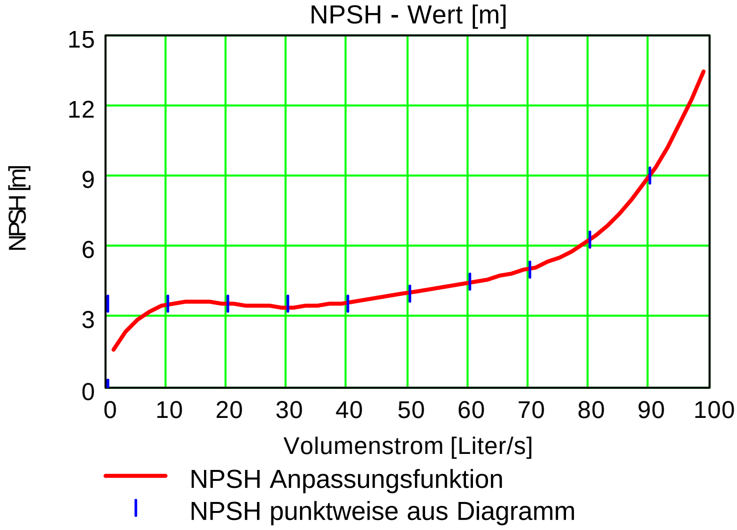
Anmerkungen:

Versuchen Sie eigenständig Werte, wie Verluste, Durchmesser, geodätische Höhen usw. zu verändern. Beobachten Sie den Betriebspunkt.

Da sich die Rohrreibungsverluste mit dem Durchmesser, der Re-Zahl usw. verändern. Könnte man zur Berücksichtigung das Prandtl-Colebrook Diagramm bzw. die entsprechenden Gleichungen für den Rohrreibungsbeiwert in das "Programm" einbauen.

NPSH - Wert $k1 := 6$ $koeff := regress\left(Volumenstrom \cdot \frac{s}{m^3}, NPSH \cdot \frac{1}{m}, k1\right)$

Anpassungsfunktion $NPSH_{Pumpe}(V_{Punkt}) := interp(koeff, Volumenstrom, Förderhöhe, V_{Punkt})$



Wo muss die Pumpe aufgestellt werden ?

Annahme Zulaufbetrieb $z_{Pumpe} \geq NPSH_{Betriebspunkt} + \Delta h_{vUwPumpe} - \frac{p_{uw} - p_{Dampfdruck}}{\rho_{Wasser} \cdot g}$

$NPSH_{Betriebspunkt} := NPSH_{Pumpe}(V_{Betriebspunkt})$ $NPSH_{Betriebspunkt} = 4.039\,m$

$$z_{Pumpe} := NPSH_{Betriebspunkt} + \frac{\zeta_{Saugleitung}}{2 \cdot g \cdot A_{Saugleitung}^2} \cdot V_{Betriebspunkt}^2 - \frac{p_{uw} - p_{Dampfdruck}}{\rho_{Wasser} \cdot g}$$

$z_{Pumpe} = 5.094\,m$

Aufschlüsselung $\Delta h_v := \frac{\zeta_{Saugleitung}}{2 \cdot g \cdot A_{Saugleitung}^2} \cdot V_{Betriebspunkt}^2$ $Druckhöhe := \frac{p_{uw} - p_{Dampfdruck}}{\rho_{Wasser} \cdot g}$

$z_{Pumpe} = 5.094\,m$ $NPSH_{Betriebspunkt} = 4.039\,m$ $\Delta h_v = 8.065\,m$ $Druckhöhe = 7.011\,m$

Lösung: Die Pumpe muss **mindestens** $z_{Pumpe} = 5.094\,m$ **unter** dem Unterwasserspiegel aufgestellt werden !!

Leistung $P_{Pumpe} := \rho_{Wasser} \cdot g \cdot H_{Betriebspunkt} \cdot V_{Betriebspunkt}$ $P_{Pumpe} = 24.365\,kW$

Hydraulische Leistung $P_{hyd} := \rho_{Wasser} \cdot g \cdot (z_{ow} - z_{uw}) \cdot V_{Betriebspunkt}$ $P_{hyd} = 17.085\,kW$

Anlagen-Wirkungsgrad $\eta_{Anlage} := \frac{P_{hyd}}{P_{Pumpe}}$ $\eta_{Anlage} = 70.121\,\%$