



DI Dr. techn. Klaus LEEB

klaus.leeب@surfeu.at

Dimensionieren eines Säulendrehkrans



- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

Numerische Integration, Energiemethoden der Festigkeitslehre (Satz von Castigliano)

- Kurzzusammenfassung

Der Kran soll so ausgelegt werden, dass die zulässige Durchbiegung beim ungünstigsten Lastangriff unter Berücksichtigung des Eigengewichtes des Trägers nicht überschritten wird. Optimierungsaufgabe: Die Abmessungen der Säule (Rohr) und des Auslegers (I-Träger) sind so zu wählen, dass beide denselben Anteil (die Hälfte) an der Gesamtdurchbiegung bewirken. (Die Werte sind dem Roloff/Matek zu entnehmen)

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand: **[optional]**

Die Dimensionierung auf Formänderung (zulässige Durchbiegung) ist meist mit einem erheblichen mathematischen Aufwand verbunden. Die Aufgabenstellung wird auf das Grundlagenwissen der Mechanik (Biegemomentenverlauf bestimmen) und das Grundlagenwissen der Mathematik (Differenzieren) reduziert. Den mathematischen Aufwand übernimmt MathCAD (Integration) Diese Aufgabe soll ein Beispiel für eine Problemlösung durch gezieltes Probieren sein.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

Fördertechnik (Tragkonstruktionen) , 4.Jahrgang, Maschineningenieurwesen

- Mathcad-Version:

Mathcad 2001

- Literaturangaben: **[optional; sehr erwünscht]**

Steger "Technische Mechanik 3" , Fördertechnikbücher über Krane
Tabellenbuch Roloff/Matek oder ähnliches

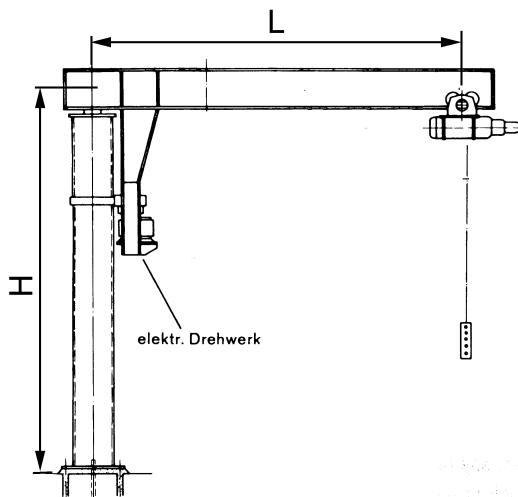
- Anmerkungen bzw. Sonstiges: **[optional]**

Diese Aufgabe wurde vom Autor bereits als Testaufgabe gestellt, als Vorbereitung auf die Fachtheorie. Die Lösung erfolgte mit MathCAD und der notwendigen Herleitung der Terme für den Satz von Castigliano.

Anmerkung: Es hat sich gezeigt, dass Schüler händisch nach dem ersten Abschätzen keinen weiteren Rechengang durchführen wollen. Mit dem Programm MathCAD jedoch zeigte sich, dass das Optimieren durch gezieltes Probieren, ohne viel Mathematik betreiben zu müssen, vielen Schülern eine gewisse Freude bereitet hat.



Der Drehkran ist zu dimensionieren.



$L = 1.8\text{m}$
 $H = 2.5\text{m}$

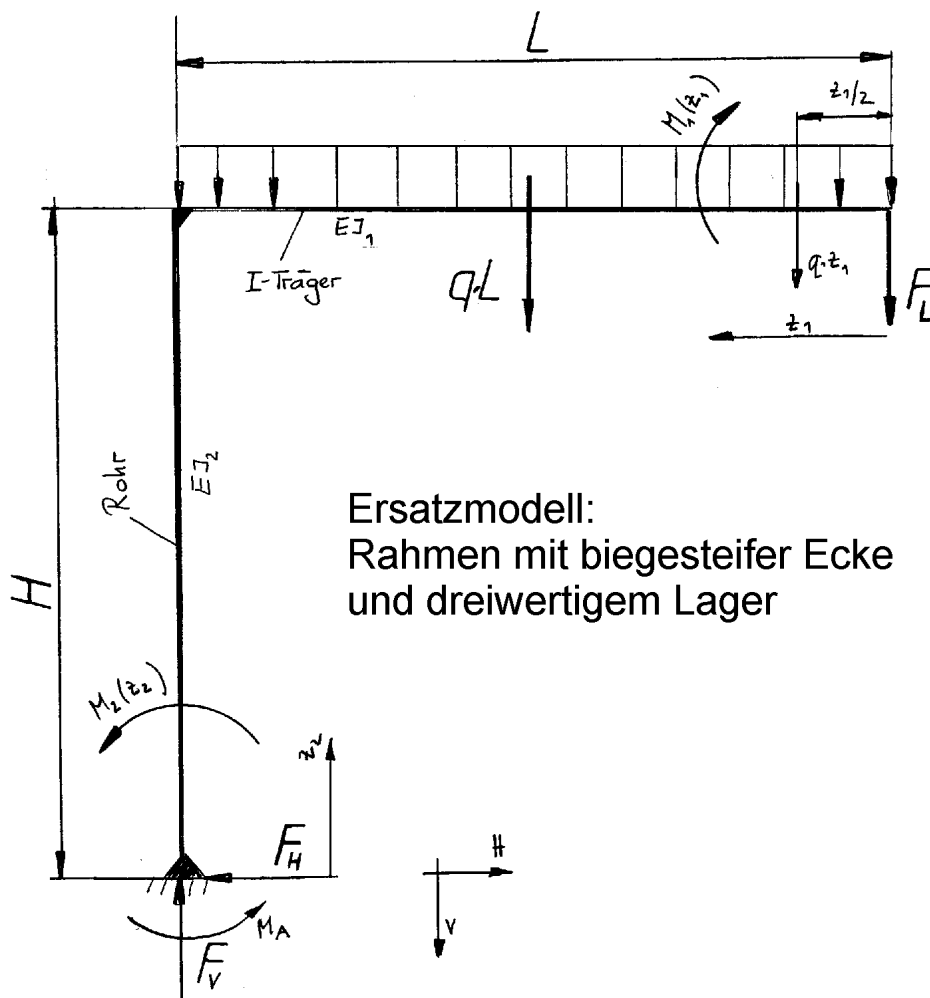
Last: $m_L = 2400\text{ kg}$

Ausleger: I-Träger
 Säule: Rohr $\varnothing \times$ Wandstärke
 (siehe Roloff/Matek)

Zulässige Verschiebung des Lastangriffpunktes :
 $L/500$

Gesucht:

Die Abmessungen der Säule und des Auslegers, wobei die Anteile der beiden Träger an der Gesamtdurchbiegung gleich groß sein sollen, unter Beachtung, dass die Gesamtdurchbiegung den zulässigen Wert nicht überschreitet !



Ersatzmodell:
 Rahmen mit biegesteifer Ecke
 und dreiwertigem Lager

Grundlagen der Mechanik aus dem Gebiet der Festigkeitslehre

1. Schritt: Auflagerkräfte berechnen:

$$\sum F_H = -F_H = 0$$

$$F_H = 0$$

$$\sum F_V = -F_V + q \cdot L + F_L = 0$$

$$F_V = q \cdot L + F_L$$

$$\sum M = M_A - q \cdot L \cdot \frac{L}{2} - F_L \cdot L = 0$$

$$M_A = -q \cdot \frac{L^2}{2} - F_L \cdot L$$

2. Schritt: Biegemomentenverläufe berechnen:

Ausleger: $\sum M = -M_1(z_1) - q \cdot \frac{z_1^2}{2} - F_L \cdot z_1$

$$M_1(z_1) = -q \cdot \frac{z_1^2}{2} - F_L \cdot z_1$$

Säule $\sum M = M_2(z_2) + M_A = 0$ M_A einsetzen

$$M_2(z_2) = -q \cdot \frac{L^2}{2} - F_L \cdot L$$

3. Schritt: partielle Ableitungen nach der Kraft F_L bilden (für Satz von Castigliano):

$$\frac{\partial}{\partial F_L} M_1(z_1) = -z_1$$

$$\frac{\partial}{\partial F_L} M_2(z_2) = -L$$

4. Schritt: Satz von Castigliano

$$z_{FL} = \int_0^L \frac{M_1(z_1)}{E \cdot J_1} \cdot \frac{\partial}{\partial F_L} M_1(z_1) dz_1 + \int_0^L \frac{M_2(z_2)}{E \cdot J_2} \cdot \frac{\partial}{\partial F_L} M_2(z_2) dz_2$$

= die Verschiebung des Lastangriffpunktes der Kraft F_L in Richtung der Kraft

Der erste Term entspricht dem Anteil des Auslegers an der Verschiebung, und der zweite Term entspricht dem Anteil der Säule an der Verschiebung des Lastangriffpunktes der Kraft F_L .

Berechnung und Optimierung mit konkreten Zahlen:

Die Buchstaben werden nachfolgend immer mit einer Tiefstellung versehen, damit man nicht unabsichtlich eine Einheit umdefiniert.

Auslegerlänge: $L_{\text{Ausleger}} := 1.8 \cdot \text{m}$

Säulenhöhe: $H_{\text{Säule}} := 2.5 \cdot \text{m}$

E-Modul: $E_{\text{Modul}} := 2.1 \cdot 10^5 \cdot \frac{\text{newton}}{\text{mm}^2}$ $\text{kN} := 10^3 \cdot \text{newton}$

Masse der Last: $m_{\text{Last}} := 2400 \cdot \text{kg}$ Kraft F_L $F_{\text{Last}} := m_{\text{Last}} \cdot g$ $F_{\text{Last}} = 23.536 \text{ kN}$

Zulässige Verschiebung (Durchbiegung) $z_{F_zul} := \frac{L_{\text{Ausleger}}}{500}$ $z_{F_zul} = 3.6 \text{ mm}$

1. Annahme für die Abmessungen des Auslegers und der Säule (lt. Roloff/Matek)

Ausleger I-Träger I-320

Flächenträgheitsmoment: $J_1 := 12510 \cdot \text{cm}^4$

Eigengewicht pro Meter $m_{\text{Eigen}} := 77.7 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}}$

Streckenlast: $q := m_{\text{Eigen}} \cdot g$ $q = 761.977 \frac{\text{newton}}{\text{m}}$

Säule Rohr 508x11

Flächenträgheitsmoment: $J_2 := 53056 \cdot \text{cm}^4$

Auflagerkräfte Nm := newton · m

$F_V := q \cdot L_{\text{Ausleger}} + F_{\text{Last}}$ $M_A := -q \cdot \frac{L_{\text{Ausleger}}^2}{2} - F_{\text{Last}} \cdot L_{\text{Ausleger}}$ $F_{AH} := 0 \cdot \text{newton}$

$F_V = 24.908 \text{ kN}$

$M_A = -4.36 \times 10^4 \text{ Nm}$

$F_{AH} = 0 \text{ newton}$

Biegemomentenverläufe und partielle Ableitungen

$M_1(z_1) := -q \cdot \frac{z_1^2}{2} - F_{\text{Last}} \cdot z_1$

$\frac{\partial}{\partial F_L} M_1(z_1) = -z_1$

$M_2(z_2) := -q \cdot \frac{L_{\text{Ausleger}}^2}{2} - F_{\text{Last}} \cdot L_{\text{Ausleger}}$

$\frac{\partial}{\partial F_L} M_2(z_2) = -L_{\text{Ausleger}}$

Satz von Castigliano

Anteil der Säule darf die Hälfte der zulässigen Gesamtdurchbiegung betragen $z_{\text{FSäule_zul}} := \frac{z_{\text{F_zul}}}{2}$

$z_{\text{FSäule}} := \int_0^{H_{\text{Säule}}} \frac{M_2(z_2)}{E_{\text{Modul}} \cdot J_2} \cdot (-L_{\text{Ausleger}}) dz_2$

$z_{\text{FSäule}} = 1.761 \text{ mm}$

$z_{\text{FSäule_zul}} = 1.8 \text{ mm}$

Anteil des Auslegers

$z_{\text{FAusl_zul}} := \frac{z_{\text{F_zul}}}{2}$

$z_{\text{FAusl}} := \int_0^{L_{\text{Ausleger}}} \frac{M_1(z_1)}{E_{\text{Modul}} \cdot J_1} \cdot (-z_1) dz_1$

$z_{\text{FAusl}} = 1.78 \text{ mm}$

$z_{\text{FAusl_zul}} = 1.8 \text{ mm}$

$z_{\text{F_gesamt}} := z_{\text{FAusl}} + z_{\text{FSäule}}$

$z_{\text{F_gesamt}} = 3.541 \text{ mm}$

ist kleiner als

$z_{\text{F_zul}} = 3.6 \text{ mm}$

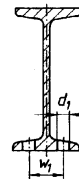
Da die Gesamtverschiebung kleiner ist als die zulässige Gesamtverschiebung, und die Anteile von Säule und Ausleger in etwa gleich groß sind, wie in der Aufgabenstellung gefordert, ist der Säulendrehkran optimiert ausgelegt.

Anmerkung: Versuchen Sie eigenständig etwas mit den Angaben, wie der Masse der Last und den Abmessungen herumzuspielen und diese zu verändern. Danach wählen Sie den I-Träger für den Ausleger und das Rohr für die Säule so, dass die oben angeführten Kriterien bezüglich der Durchbiegung erfüllt sind.

Die Tabellen sind dem Tabellenbuch Roloff/Matek entnommen.

Kurzzeichen	längenbezogene Masse m' kg/m	für die Biegeachse					
		$x - x$			$y - y$		
		I_x cm ⁴	W_x cm ³	i_x cm	I_y cm ⁴	W_y cm ³	i_y cm
I Schmale I-Träger (I-Reihe) nach DIN 1025-1							
80	5,94	77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91
100	8,34	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07
120	11,1	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23
140	14,3	573	81,9	5,61	35,2	10,7	1,40
160	17,9	935	117	6,40	54,7	14,8	1,55
180	21,9	1450	161	7,20	81,3	19,8	1,71
200	26,2	2140	214	8,00	117	26,0	1,87
220	31,1	3060	278	8,80	162	33,1	2,02
240	36,2	4250	354	9,59	221	41,7	2,20
260	41,9	5740	442	10,4	288	51,0	2,32
280	47,9	7590	542	11,1	364	61,2	2,45
300	54,2	9800	653	11,9	451	72,2	2,56
320	61,0	12510	782	12,7	555	84,7	2,67
340	68,0	15700	923	13,5	674	98,4	2,80
360	76,1	19610	1090	14,2	818	114	2,9
380	84,0	24010	1260	15,0	975	131	3,02
400	92,4	29210	1460	15,7	1160	149	3,13
450	115	45850	2040	17,7	1730	203	3,43
500	141	68740	2750	19,6	2480	268	3,72
550	166	99180	3610	21,6	3490	349	4,02

Warmgewalzte I-Träger



Nennmaß bzw. Außendurchmesse mm	längenbezogene Masse m' kg/m	für die Biegeachse		
		$x - x = y - y$		
		I cm ⁴	W cm ³	i cm
d³⁾ nahtlose Stahlrohre				
60,3	4,11	21,6	7,16	2,03
76,1	5,24	44,7	11,8	2,59
88,9	6,76	79,2	17,8	3,03
114,3	9,83	192	33,6	3,92
139,7	13,4	393	56,2	4,80
168,3	18,2	777	92,4	5,79
219,1	33,1	2386	218	7,53
273	41,4	4696	344	9,43
323,9	55,5	8869	548	11,2
355,6	68,6	13201	742	12,3
406,4	86,3	21732	1069	14,1
457	110	35091	1536	15,8
508	135	53056	2089	17,6
610	184	104752	3435	21,1