

Dipl.-Ing. Paul Mohr, p.mohr@eduhi.at

## GPS-Funktionen



- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:  
angewandte Trigonometrie; Geocaching
- Kurzzusammenfassung  
Bei Geocaching, einer modernen Art der Schnitzeljagd, muss man immer wieder zwischen geografischen Koordinaten (geogr. Länge und Breite) und Peilungsdaten (Richtung und Winkel) umrechnen.
- Didaktische Überlegungen:  
Trigonometrie anhand einer Outdoorübung? Cool!
- Lehrplanbezug:  
ebene Trigonometrie des allgemeinen Dreiecks
- Mathcad-Version:  
Mathcad 15

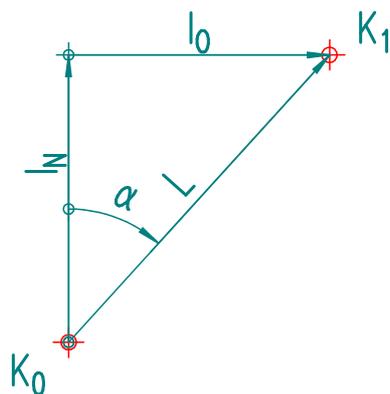


### Einbindung des Mathcad-Moduls mit den GPS-Funktionen

→ Verweis:C:\Users\Paul\Documents\Schule\Divers\M&T Beiträge\GPS-Funktionen\f\_GPS.xmcdz(R)

*Ein Klick auf die Verweiszeile öffnet die kommentierten Einzelfunktionen*

### Demobeispiel



#### Legende

$K_0, K_1 \dots$  Start- und Zielkoordinaten; geogr. Breite und Länge  
 $L \dots \dots \dots$  Entfernung zwischen  $K_0$  und  $K_1$ ; der Wert ist immer positiv  
 $\alpha \dots \dots \dots$  Peilungswinkel von  $K_0$  zu  $K_1$  von Norden im Uhrzeigersinn!  
 $l_N \dots \dots \dots$  Entfernung von  $K_0$  nach  $K_1$ ; Richtung Norden ist positiv  
 $l_O \dots \dots \dots$  Entfernung von  $K_0$  nach  $K_1$ ; Richtung Osten ist positiv

#### Beispiel

$$K_0 := \begin{pmatrix} 48^\circ + 21.117' \\ 14^\circ + 21.541' \end{pmatrix}$$

$$K_1 := \begin{pmatrix} 48^\circ + 21.217' \\ 14^\circ + 21.441' \end{pmatrix}$$

*Bei Geocaching werden die Koordinaten in Grad und Dezimalminuten angegeben. Eingabe von ' durch [']][x][<--]*

**Funktionsaufrufe** anhand von  $K_0$ **Umrechnungen**

Entfernung pro  
Min in O-W-Richtung

$$e_{OW} := f_{e_{OW}}(K_0)$$

$$e_{OW} = 1229.423 \cdot \frac{m}{'}$$

ganze Grad von  
Dezimalgrad

$$G_K := f_{Grad}(K_0)^\circ$$

$$G_K = 48 \cdot ^\circ$$

Dezimalminuten  
aus Dezimalgrad

$$M_K := f_{Min}(K_0)'$$

$$M_K = 21.117 \cdot '$$

Dezimalgrad aus  
Grad und Dez.-Min.

$$f_{DG}(G_K, M_K) = 0.83786 \cdot ^\circ$$

$$K_{1_0} = 48.35362 \cdot ^\circ$$

Dezimalkoordinaten  
in Grad und Dez.Min.

$$f_{GradMin}(K_0) = \begin{pmatrix} 48 & 21.117 \\ 14 & 21.541 \end{pmatrix}$$

**Entfernungen und Winkel zwischen der Start- und Zielkoordinate**

Entf. in Nord-Süd-Richtung

$$l_N := f_{d_N}(K_0, K_1)$$

$$l_N = 185 \text{ m}$$

*pos. von S  
nach N*

Entf. in Ost-West-Richtung

$$l_O := f_{d_O}(K_0, K_1)$$

$$l_O = -122.942 \text{ m}$$

*pos. von W  
nach O*

Entfernung zwischen  
Start- und Zielkoordinate

$$L := f_d(K_0, K_1)$$

$$L = 222.126 \text{ m}$$

Winkel von der Start-  
zur Zielkoordinate

$$\alpha := f_\alpha(K_0, K_1)$$

$$\alpha = 326.394 \cdot ^\circ$$

*von Richtung  
Nord im  
Uhrzeigersinn*

**Peilung** (von  $K_0$ , Entf.  $L$ , Winkel  $\alpha$  ergibt wieder  $K_1$ )

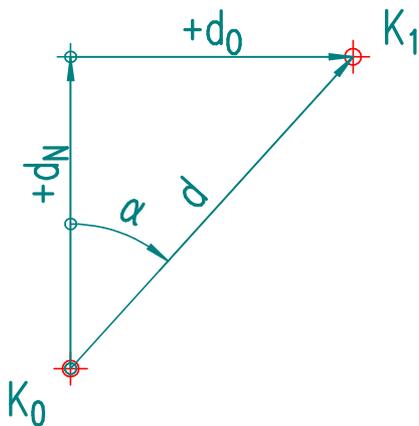
Zielkoordinaten

$$K_1 := f_{K_1}(K_0, L, \alpha)$$

$$f_{GradMin}(K_1) = \begin{pmatrix} 48 & 21.217 \\ 14 & 21.441 \end{pmatrix}$$

# GPS-Funktionen

Die nachfolgenden Funktionen gelten nur für kleine Entfernungen von einigen Kilometern.



## Legende

- $K_0, K_1 \dots$  Start- und Zielkoordinaten;  
geogr. Breite und Länge in Dezimalgrad
- $d \dots\dots\dots$  Distanz zwischen  $K_0$  und  $K_1$ ; der Wert ist immer positiv
- $\alpha \dots\dots\dots$  Peilungswinkel von  $K_0$  zu  $K_1$  von Norden im Uhrzeigersinn!
- $d_N \dots\dots\dots$  Distanz von  $K_0$  nach  $K_1$  Richtung Norden (Süden ist negativ)
- $d_O \dots\dots\dots$  Distanz von  $K_0$  nach  $K_1$ ; Richtung Osten (Westen ist negativ)

## Funktionsübersicht

- $f_{eow}(K) \dots\dots\dots$  berechnet die Entfernung pro Winkelminute in Ost-West-Richtung an der Koordinate  $K$
- $f_{Grad}(DG)$  und  $f_{Min}(DG) \dots\dots$  extrahiert die Grad bzw. Dezimalminuten aus den Dezimalgrad  $DG$
- $f_{DG}(G, M) \dots\dots\dots$  berechnet Dezimalgrad aus Grad  $G$  und Dezimalminuten  $D$
- $f_{GradMin}(K) \dots\dots\dots$  stellt die Dezimalgrad-Koordinaten  $K$  in Grad und Dezimalminuten dar
- $f_{dN}(K_0, K_1)$      $f_{dO}(K_0, K_1) \dots\dots$  berechnet zwischen den beiden Koordinaten  $K_0$  und  $K_1$  die Distanz Richtung Norden bzw. Osten; Richtung N und O sind positiv.
- $f_d(K_0, K_1)$      $f_{\alpha}(K_0, K_1) \dots\dots\dots$  Luftlinie bzw. Winkel von Nord im Uhrzeigersinn zw.  $K_0$  und  $K_1$
- $f_{K1}(K_0, d_{01}, \alpha) \dots\dots\dots$  berechnet ausgehend von der Koordinate  $K_0$  anhand der Distanz  $d_{01}$  und dem Peilungswinkel  $\alpha$  die Zielkoordinate.  
Der Peilungswinkel wird von Nord im Uhrzeigersinn angegeben.

### Funktions-Definitionen

## Einheiten und Konstante

Winkel                     $^{\circ} := \text{Grad}$              $' := \frac{1}{60} \text{Grad}$              $'' := \frac{1}{3600} \text{Grad}$

Entfernung pro  
Min in N-S-Richtung     $e_{NS} := 1850 \frac{\text{m}}{'} \quad \text{Erdumfang durch } 360^{\circ} * 60'$

## Funktionen

Entfernung pro  
Min in O-W-Richtung     $f_{eow}(K) := e_{NS} \cdot \cos(K_0)$     mit zunehmender geogr. Breite wird der Breitenkreis immer kürzer.

ganze Grad von  
Dezimalgrad             $f_{Grad}(DG) := \frac{\text{Trunc}(DG, 1^{\circ})}{^{\circ}}$

Dezimalminuten  
aus Dezimalgrad

$$f\_Min(DG) := \left( \frac{DG}{^\circ} - f\_Grad(DG) \right) \cdot 60$$

Dezimalgrad aus  
Grad und Dez.-Min.

$$f\_DG(G, M) := \left( G + \frac{M}{60} \right)^\circ$$

Dezimalkoordinaten  
in Grad und Dez.-Min.

$$f\_GradMin(K) := \begin{pmatrix} f\_Grad(K_0) & f\_Min(K_0) \\ f\_Grad(K_1) & f\_Min(K_1) \end{pmatrix}$$

## Entfernungen und Winkel zwischen zwei Koordinaten

Entf. in Nord-Süd-Richtung

$$f\_d_N(K_0, K_1) := e_{NS} \cdot (K_1 - K_0)$$

positiv, wenn  $K_1$  nördlich  
von  $K_0$  liegt

Entf. in Ost-West-Richtung

$$f\_d_O(K_0, K_1) := f\_e_{OW}(K_0) \cdot (K_1 - K_0)$$

positiv, wenn  $K_1$  östlich von  
 $K_0$  liegt

Entfernung zwischen  
zwei Koordinaten

$$f\_d(K_0, K_1) := \sqrt{f\_d_N(K_0, K_1)^2 + f\_d_O(K_0, K_1)^2}$$

Winkel von der Start-  
zur Zielkoordinate

$$f\_alpha(K_0, K_1) := \begin{cases} Q \leftarrow 0 \\ Q \leftarrow Q + 1 & \text{if } \text{sign}(f\_d_N(K_0, K_1)) = 1 & K_1 \text{ n\"ordlich von } K_0 \\ Q \leftarrow Q + 2 & \text{if } \text{sign}(f\_d_O(K_0, K_1)) = 1 & K_1 \text{ \"ostlich von } K_0 \\ \alpha \leftarrow \text{asin} \left( \frac{f\_d_O(K_0, K_1)}{f\_d(K_0, K_1)} \right) \\ \alpha \leftarrow 360^\circ + \alpha & \text{if } Q = 1 \\ \alpha \leftarrow 180^\circ - \alpha & \text{if } Q = 2 \vee Q = 0 \\ \text{return mod}(\alpha, 2\pi) \end{cases}$$

Nachdem die asin-Fkt. nur  
Winkel zw. plus und minus  
 $90^\circ$  liefert, muss das Ergebnis  
je nach Lage von  $K_1$  zu  $K_0$   
auf ein Ergebnis zwischen  
Null und  $360^\circ$  korrigiert werden.

## Peilung

Zielkoordinaten

$$f\_K_1(K_0, d_{01}, \alpha) := K_0 + \begin{pmatrix} d_{01} \cdot \cos(\alpha) \\ e_{NS} \\ d_{01} \cdot \sin(\alpha) \\ f\_e_{OW}(K_0) \end{pmatrix}$$