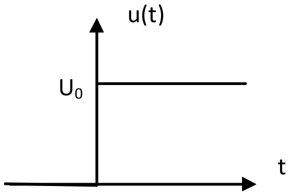
Wilfried Rohm

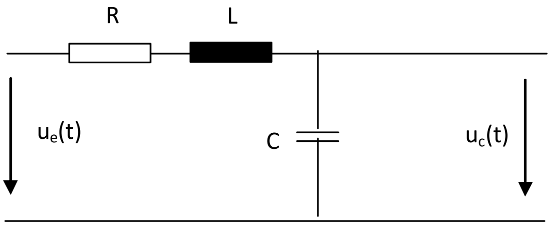
Cluster 2: Sprungantwort

zum Menü

Hinweis: Cluster 2 bezieht sich auf Höhere Technische Lehranstalten mit den Abteilungen Elektrotechnik, Elektronik, Biomedizin und Gesundheitstechnik

Es soll das Verhalten eines Serienschwingkreises (siehe Skizzen Abb.IV.C2) beim Anlegen einer Gleichspannung zum Zeitpunkt t = 0 (Einschaltvorgang) untersucht werden:





Erklärung der Abkürzungen:
U_o… angelegte Spannung
u_e…Eingangsspannung, u_c...Spannungsabfall am Kondensator

Es soll das Verhalten eines Serienschwingkreises (siehe Skizzen Abb.IV.C2) beim Anlegen einer Gleichspannung zum Zeitpunkt t = 0 (Einschaltvorgang) untersucht werden:

a) Zeigen Sie, dass Sie über das Aufstellen der Differentialgleichung für $u_c(t)$ nach Umformung folgende Differentialgleichung erhalten können. (B2_4-A,B)

$$\frac{d^2u_c}{dt^2}+\frac{R}{L}\cdot\frac{du_c}{dt}+\frac{1}{L\cdot C}\cdot u_c=\frac{1}{L\cdot C}\cdot u_e$$

b) An den Eingang wird eine Gleichspannung $u_e = U_0 = 50$ V gelegt. Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf für $u_c(t)$ und i(t), indem Sie die obige Differentialgleichung für die folgenden Parameter lösen:

L = 0.5 H, C = 10 µF, R = 600 ?

Zum Zeitpunkt 0 ist das System energielos mit $u_c(0) = 0$ und $u_c'(0) = 0$.
Stellen Sie die Verläufe der beiden Funktionen $\mathbf{u_c(t)}$ und **i(t)** graphisch dar.

Hinweis: *Sie können die Differentialgleichung im Zeitbereich oder mit Hilfe der Laplace-Transformation lösen*. (B2_4-B)

c) Bezüglich des Einschaltvorganges können im Wesentlichen drei Fälle unterschieden werden. Nehmen Sie den Widerstand als veränderlich an und geben Sie bei sonst gleichen Werten für L und C wie in Aufgabenteil b) drei verschiedene Werte für den Widerstand R an, welche die einzelnen Fälle charakterisieren.

Begründen Sie die Wahl Ihrer Werte und skizzieren Sie die unterschiedlichen Spannungsverläufe.

(B2_4-B,D)

Lösung

a) Aufstellen der Differentialgleichung

Ausgangspunkt : $u_R + u_L + u_C = u_e$ mit der Eingangsspannung $u_e = u_e(t)$

Gemäß den Grundlagen aus der Elektrotechnik gelten die folgenden Beziehungen:

$$u_R = R \cdot i \qquad \text{mit} \qquad i = C \cdot \frac{d}{dt} u_c$$

$$u_L = L \cdot \frac{d}{dt} i = L \cdot C \cdot \frac{d^2}{dt^2} u_c$$

Hinweis zur Schreibweise: Ableitungen wie etwa $\frac{di}{dt}$ werden in Mathcad sp geschrieben: $\frac{d}{dt} i$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die obere Gleichung ("Ausgangspunkt") ergibt sich:

$$R \cdot C \cdot \frac{d}{dt} u_c + L \cdot C \cdot \frac{d^2}{dt^2} u_c + u_c = u_e$$

Umordnen nach fallenden Potenzen der Ableitungen und Division durch L*C ergibt die Normalform der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2}{dt^2} u_c + \frac{R}{L} \cdot \frac{d}{dt} u_c + \frac{1}{L \cdot C} \cdot u_c = \frac{1}{L \cdot C} \cdot u_e$$

---

b) Ermittlung des zeitlichen Verlaufes von uc(t) durch lösen der obigen Differentialgleichng mit den gegebenen Werten:

$U_0 := 50V \quad R := 600\Omega \quad L := 0.5H \quad C := 10 \cdot 10^{-6} F$

$U_0 := U_0 \quad R := R \quad L := L \quad C := C$ für symbolische Ausgaben sinnvoll!

Variante 1: Lösen der Differentialgleichung (herkömmlich) im Zeitbereich:

Zunächst die Lösung der homogenen Gleichung $\frac{d^2}{dt^2} u_c + \frac{R}{L} \cdot \frac{d}{dt} u_c + \frac{1}{L \cdot C} \cdot u_c = 0$

Über den Lösungsansatz $u_c(t) = e^{\lambda \cdot t}$

erhält man die charakteristische Gleichung : $\lambda^2 + \frac{R}{L} \cdot \lambda + \frac{1}{L \cdot C} = 0$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} := \lambda^2 + \frac{R}{L} \cdot \lambda + \frac{1}{L \cdot C} = 0 \text{ auflösen}, \lambda \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{-\frac{4 \cdot L - C \cdot R^2}{C}}}{2 \cdot L} - \frac{R}{2 \cdot L} \\ -\frac{R}{2 \cdot L} - \frac{\sqrt{-\frac{4 \cdot L - C \cdot R^2}{C}}}{2 \cdot L} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200 \\ -1000 \end{pmatrix} \frac{1}{s}$$

Die charakteristische Gleichung hat 2 reelle Lösungen - daher muß die Lösung den "Kriechfall" bzw. Aperiodischen Fall der homogenen Schwingungsgleichung liefern

$u_h(t,C1,C2) := C1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + C2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}$

Ansatz für die Lösung der homogenen Gleichung mit den Konstanten C1 und C2.

Die partikuläre Lösung wird am einfachsten über einen speziellen Ansatz mit Berücksichtigung der Tatsache ermittelt, dass die Störfunktion konstant ist.

spezieller Ansatz: $Ucp := C0$

Einsatzen in die Ausgangsgleichung unter der Berücksiochtigung der Tatsache, dass die Ableitungen von U_{cp} alle gleich Null sind, führt zur Gleichung

$$\frac{Ucp}{L \cdot C} = \frac{U_0}{L \cdot C}$$

Lösung dieser Gleichung $Ucp := \frac{Ucp}{L \cdot C} = \frac{U_0}{L \cdot C}$ auflösen, Ucp $\rightarrow U_0$

$$Ucp = 50\,\mathrm{V}$$

$u_c(t,C1,C2) := u_h(t,C1,C2) + Ucp$ Gesamtlösung

$$u1_c(t,C1,C2) := \frac{d}{dt} u_c(t,C1,C2)$$

$C1 := 0V \quad C2 := 0V$

Vorgabe

$$\begin{pmatrix} C1 \\ C2 \end{pmatrix} := \mathrm{Suchen}(C1,C2) \rightarrow \begin{pmatrix} -\dfrac{U_0 \cdot \sqrt{-\dfrac{4 \cdot L - C \cdot R^2}{C}} + R \cdot U_0}{2 \cdot \sqrt{-\dfrac{4 \cdot L - C \cdot R^2}{C}}} \\ -\dfrac{U_0 \cdot \sqrt{-\dfrac{4 \cdot L - C \cdot R^2}{C}} - R \cdot U_0}{2 \cdot \sqrt{-\dfrac{4 \cdot L - C \cdot R^2}{C}}} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} C1 \\ C2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -62.5 \\ 12.5 \end{pmatrix} V$$

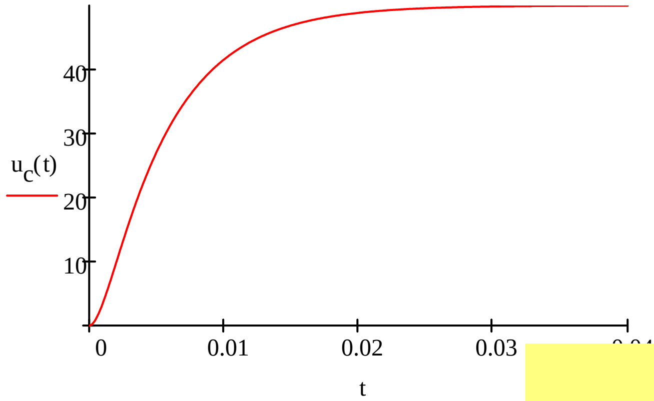
Hinweis: Aus nicht ersichtlichen Gründen findet diese Version von Mathcad (Mathcad 15) die Lösung des Gleichungssystems erst nach symbolischer Auswertung!

$u_c(t) := C1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + C2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} + U_0$

Nun sind alle Konstanten festgelegt - die Lösungsfunktion wird zur besseren Übersicht neu definiert

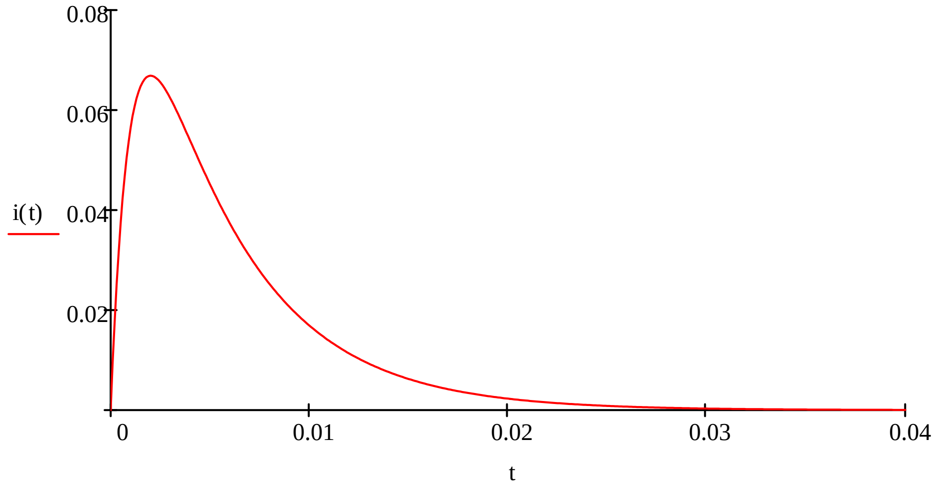
Graphische Darstellung des Spannungsverlaufes am Kondensator

$t := 0s, 0.0001s .. 0.04s$



Für den Strom durch den Kondensator gilt: $i(t) := C\cdot\frac{d}{dt}u_c(t) \rightarrow C\cdot\left[\frac{e^{-t\cdot\left(\frac{R}{2\cdot L}-\frac{\sqrt{-\frac{4\cdot L-C\cdot R^2}{C}}}{2\cdot L}\right)}\cdot\left(U_0\cdot\sqrt{-\frac{4\cdot L - C}{C}}\right.}{2\cdot\sqrt{-\frac{4\cdot L}{}}}\right.$

Hinweis: Aus nicht ersichtlichen Gründen wird von dieser Version von Mathcad (Mathcad 15) die Grafik für i(t) nur dann richtig dargestellt, wenn zuvor eine symbolische Auswertung der Ableitung erfolgt ist!



Variante 2: Lösung über die Laplacetransformation

Hier sind mehrere Lösungsgänge möglich

a) Transformation der Differntialgleichung (siehe oben) in den Bildbereich und dort deren Lösung samt anschließender Rücktransformation.

b) Direkt im Bildbereich die Übertragungsfunktion des Systems ermitteln, danach die Ausgangsspannung $U_a(s)$ = Uc(s) ermitteln und anschließend die Rücktransformation in den Zeitbereich vornehmen.

Wir wollen hier den Lösungsweg b) wählen, der praxisnäher erscheint

$U_e(s) := \left(R + s\cdot L + \frac{1}{s\cdot C}\right)\cdot I(s)$ $\qquad$ $U_a(s) := \frac{1}{s\cdot C}\cdot I(s)$

$$G(s) := \frac{U_a(s)}{U_e(s)} \text{ vereinfachen } \rightarrow \frac{1}{C \cdot L \cdot s^2 + C \cdot R \cdot s + 1}$$

Das ist die Übertragungsfunktion des Systems

Nun liegt am Eingang eine Sprungfunktion an, deren Laplacetransformierte ist:

$$U_e(s) := \frac{U_0}{s}$$

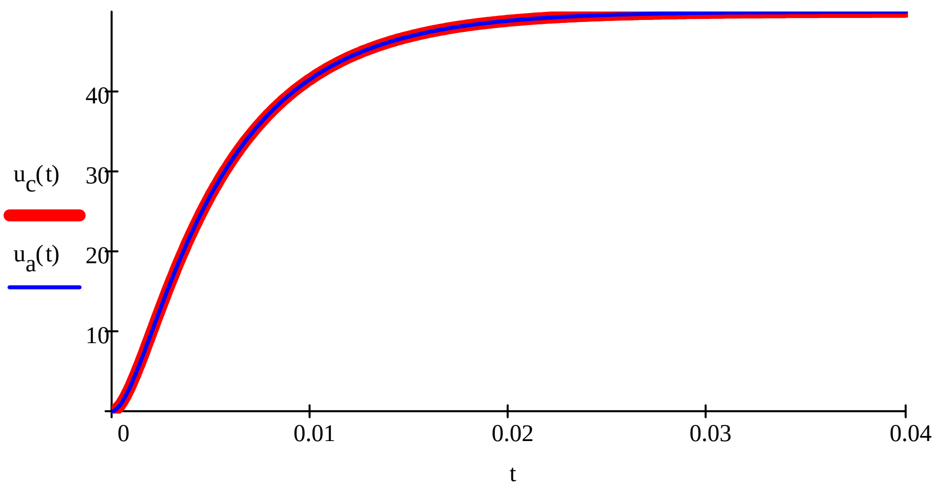
$$U_a(s) := G(s) \cdot U_e(s) \qquad U_a(s) \rightarrow \frac{U_0}{s \cdot \left(C \cdot L \cdot s^2 + C \cdot R \cdot s + 1\right)}$$

Dies ist die Lösung im Bildbereich, welche nun in den Zeitbereich mit der Inversen Laplacetransformation rücktransferiert wird.
Hinweis: Die Syntax der inversen Laplacetransformation ist in verschiedenen Mathcadversionen etwas unterschiedlich!

$$U_a(s) \text{ invlaplace}, s \rightarrow -\frac{U_0 \cdot \left(R \cdot e^{-\frac{R \cdot t}{2 \cdot L}} \cdot \sinh\left(\frac{t \cdot \sqrt{-\frac{4 \cdot L - C \cdot R^2}{C \cdot L^2}}}{2}\right) - L \cdot \sqrt{-\frac{4 \cdot L - C \cdot R^2}{C \cdot L^2}} + L \cdot e^{-\frac{R \cdot t}{2 \cdot L}} \cdot \cosh\left(\frac{t \cdot \sqrt{-\frac{4 \cdot L - C \cdot}{C \cdot L^2}}}{2}\right.\right.}{L \cdot \sqrt{-\frac{4 \cdot L - C \cdot R^2}{C \cdot L^2}}}$$

$$u_a(t) := U_0 \cdot \left[-C \cdot \frac{\exp\left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{R}{L} \cdot t\right)}{4 \cdot L - R^2 \cdot C} \cdot L \cdot \left(\frac{4 \cdot L - R^2 \cdot C}{L^2 \cdot C}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot R \cdot \sin\left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot L - R^2 \cdot C}{L^2 \cdot C}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot t\right] - 4 \cdot \frac{\exp\left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{R}{L} \cdot t\right)}{4 \cdot L - R^2 \cdot C} \cdot L \cdot \cos\left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot L -}{L^2}\right.\right.\right.$$

Das Übereinanderlegen der beiden Lösungen (über die Differentialgleichug im Zeitbereich und mittels der Laplcetransformation zeigt, dass das gleiche Ergebnis erzielt wurede.



c) Die drei gesuchten Lösungsfälle ergeben sich aus den unterschiedlichen Lösungsfällen der charakteristischen Gleichung:

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\cdot\lambda + \frac{1}{L\cdot C} = 0$$

$$\begin{pmatrix}\lambda 1\\ \lambda 2\end{pmatrix} := \lambda^2 + \frac{R}{L}\cdot\lambda + \frac{1}{L\cdot C} = 0 \text{ auflösen}, \lambda \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{-\dfrac{4\cdot L - C\cdot R^2}{C}}}{2\cdot L} - \dfrac{R}{2\cdot L} \\ -\dfrac{R}{2\cdot L} - \dfrac{\sqrt{-\dfrac{4\cdot L - C\cdot R^2}{C}}}{2\cdot L} \end{pmatrix}$$

Der Wurzelausdruck bestimmt die unterschiedlichen Lösungen:

$R^2\cdot C^2 - 4\cdot L\cdot C > 0$ ergibt für $\lambda 1$ bzw. $\lambda 2$ zwei (negative) reelle Lösungen, was einer aperiodischen Lösung entspricht

$R^2\cdot C^2 - 4\cdot L\cdot C = 0$ ergibt eine relle Doppellösung, was dem aperiodischen Grenzfall entspricht.

$R^2\cdot C^2 - 4\cdot L\cdot C < 0$ ergibt für $\lambda 1$ bzw. $\lambda 2$ zwei konjugiert komplexe Lösungen, was dem sogenannten "Schwingungsfall" entspricht, weil die Lösung der homogenen Gleichung zu einer gedämpften Schwingung führt.

Um unterschiedliche Werte für R (bei ansosnten gleichbleibenden L und C) zu bestimmen, welche zu diesen drei lösungsfällen führen, müssen wir jenen Widerstand R bestimmen, für den der aperiodische Grenzfall vorliegt:

$$\left(R^2\cdot C^2 - 4\cdot L\cdot C\right) = 0 \text{ auflösen}, R \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{2\cdot\sqrt{L}}{\sqrt{C}} \\ -\dfrac{2\cdot\sqrt{L}}{\sqrt{C}} \end{pmatrix}$$

$$R_{aperiodisch} := \frac{2}{C}\cdot(L\cdot C)^{\frac{1}{2}}$$

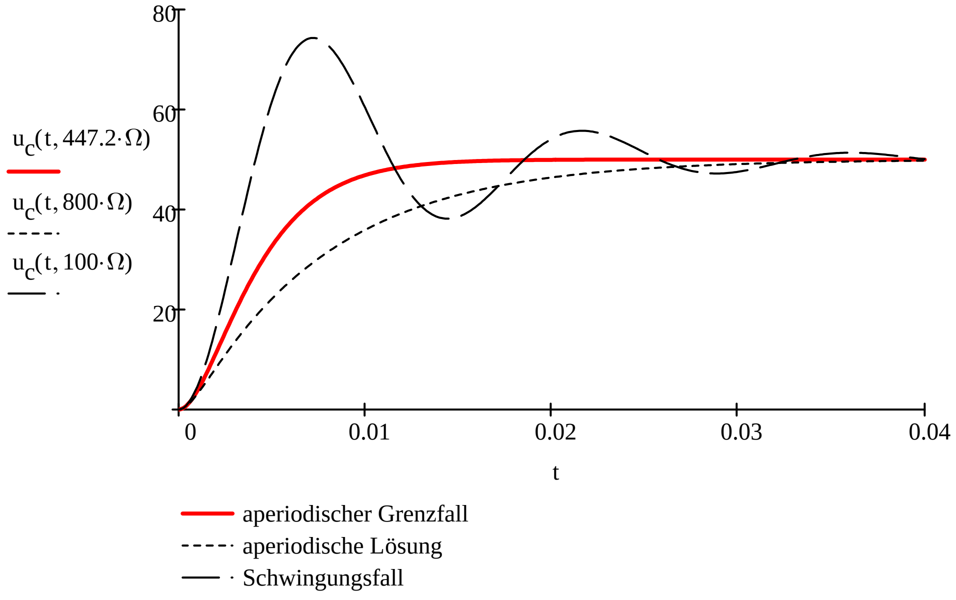
$$R_{aperiodisch} = 447.214\,\Omega$$

Ein Wert größer als $R_{aperiodisch}$ (z.B: R = 800 Ω) muss daher zu einer aperiodischen lösung führen.

Ein Wert kleiner als $R_{aperiodisch}$ (z.B: R = 100 Ω) muss daher zum "Schwingungsfall" führen.

In der Aufgabenstellung ist nur eine skizze der möglichen Lösungen gefordert. Wir wollen hier aber rechnerische lösungen ermitteln.
Dazu kopieren wir die Lösung, welche wir über die Laplacetransformation erhalten haben herunter und machen sie gleichzeitig abhängig von R - sodass dann anschließend bequem beliebige Lösungen gezeichnet werden können:

$$u_C(t,R) := U_0\cdot\left[1 - C\cdot\frac{\exp\left(\frac{-1}{2}\cdot\frac{R}{L}\cdot t\right)}{4\cdot L - R^2\cdot C}\cdot L\cdot\left(\frac{4\cdot L - R^2\cdot C}{L^2\cdot C}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot R\cdot \sin\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4\cdot L - R^2\cdot C}{L^2\cdot C}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot t\right] - 4\cdot\frac{\exp\left(\frac{-1}{2}\cdot\frac{R}{L}\cdot t\right)}{4\cdot L - R^2\cdot C}\cdot L\cdot\cos\left[\frac{1}{2}\cdot\right.\right.$$



80
60
40
20
0
0.01
0.02
0.03
0.04
t
$u_C(t, 447.2\cdot\Omega)$
$u_C(t, 800\cdot\Omega)$
$u_C(t, 100\cdot\Omega)$
aperiodischer Grenzfall
aperiodische Lösung
Schwingungsfall

zum Menü