Nietrost Bernhard, bernhard.nietrost@htl-steyr.ac.at

# Ausflussvorgänge

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  **Differentialgleichungen 1. Ordnung,**
  **analytische und numerische Lösung,**
  **Numerik (Lösen von Gleichungen, Probleme bei der numerischen Lösung)**

- Kurzzusammenfassung

  **Erstellen und Lösen von Differentialgleichungen 1.Ordnung mit Trennen der Variablen und Technologieeinsatz**

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand: [***optional***]

  **Praxisbezug, leicht verständliche Aufgabenstellung,**
  **Formulierung von Differntialgleichungen, Modellbildung**
  **"einfache" Lösung mit Mathcad**
  **graphische Darstellung und Interpretation der Ergebnisse**
  **Grenzen der Numerik bei realen Problemstellungen erkennen**

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  **Angewandte Mathematik, 4/5 Jahrgang, alle Abteilungen, besonders Maschinenbau**

- Mathcad-Version:

  **Mathcad 15**

- Literaturangaben: [***optional; sehr erwünscht***]

  **Timischl 4**

- Anmerkungen bzw. Sonstiges: [***optional***]

  **-----------------------------------**

# Ausfließvorgänge bei verschiedenen Gefäßformen

In vielen Gegenden der Erde, die nur geringe Niveauunterschiede aufweisen, wird das Wasser in Hochbehältern gelagert um so den erforderlichen Druck für die Verteilung in den Wasserleitungen zu erhalten. Die Form der Hochbehälter variiert (zB.: zylindrisch, kegel- oder kugelförmig) .

Die Entleerung eines solchen Behälters über eine unten angeordnete Öffnung durch die Schwerkraft soll mathematisch modelliert werden. Aus der Physik ist die Ausflussgeschwindigkeit $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ bekannt, die von der Höhe (vgl Bernoulli: Energieerhaltungssatz für Flüssigkeiten) der darüberliegenden Flüssigkeitssäule bestimmt wird. Weiters kommt es durch die Reibung beim Ausfließen zu einem verringerten Querschnitt. (Die Ausflusszahl $\mu$ gibt dieVerringerung an. zB $\mu = 0.6$ bedeutet, dass nur 60 % des geometrischen Querschnitts für den Ausfluss zur Verfügung stehen, der Rest geht durch die "Reibung" verloren. In den folgenden Rechnungen wird der Einfachheit halber der verringerte Querschnitt verwendet.)

Gesucht ist wie sich die Höhe des Flüssigkeitsspiegels über der Zeit verändert.

## 1. Zylindrisches Gefäß

vergleiche auch Timischl 4 Bsp 4.13/ Abb 4.16

Aus einem zylindrischen Gefäß mit Querschnitt $A_1$ läuft Wasser durch eine unten befindliche Öffnung $A_2$ (= verringerter Querschnitt) aus. Bestimmen sie jene DGL, die diesen Vorgang beschreibt und jene Funktion h(t), welche den Flüssigkeitsspiegel in Abhängigkeit der Zeit angibt.
Am Anfang ist das Gefäß bis zu einer Höhe H gefüllt. (Von der Ausflussöffnung gemessen)

**Ansatz:**

Volumen des ausgeflossenen Wasser im Zeitraum dt = Änderung des Wasserspiegels um dh

$$-A_2 \cdot v \cdot dt = A_1 \cdot dh$$

negatives Vorzeichen muss verwendet werden, da der Flüssigkeitsspiegel h sinkt.
dt und dh sind infinitesimale Größen

$$-A_2 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \cdot dt = A_1 \cdot dh$$

Einsetzen der Ausflussgeschwindigkeit

$$-\left(\frac{A_2 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h(t)}}{A_1}\right) = \frac{dh(t)}{dt}$$

Umformen auf DGL 1.O
h(t) ... gesuchte Funktion

$$h(0) = H$$

Anfangsbedingung

## Lösung mittels Trennen der Variablen

$$-\left(\frac{A_2 \cdot \sqrt{2 \cdot g}}{A_1}\right) \cdot dt = \frac{dh}{\sqrt{h}}$$ Trennen der Variablen

$$-\left(\frac{A_2 \cdot \sqrt{2 \cdot g}}{A_1}\right) \cdot \int 1\, dt = \int \frac{1}{\sqrt{h}}\, dh$$ Integration beider Seiten

$$-\left(\frac{A_2}{A_1} \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot t\right) + C = 2 \cdot \sqrt{h}$$ implizite allgemeine Lsg

$$h = \left(C - \frac{A_2}{A_1} \cdot \sqrt{\frac{g}{2}} \cdot t\right)^2$$ explizite allgemeine Lsg

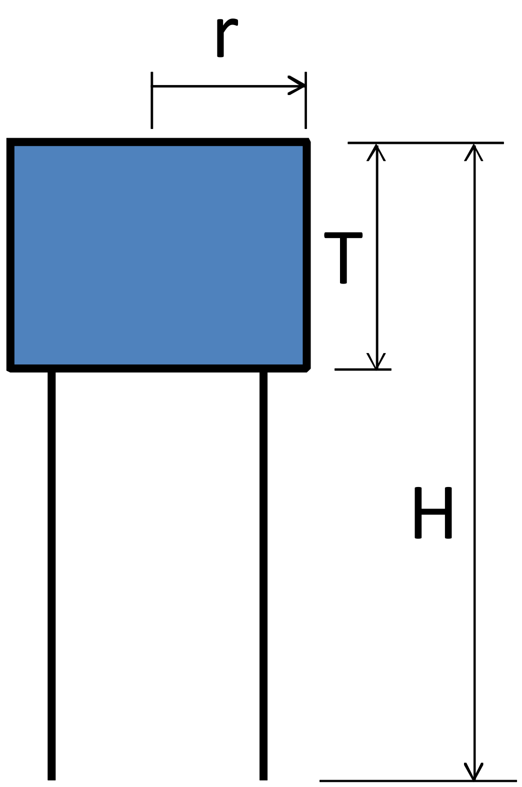
Anfangsbedingung

$H = (C - 0)^2$ ergibt

$C = \sqrt{H}$

$$h(t) = \left(\sqrt{H} - \frac{A_2}{A_1} \cdot \sqrt{\frac{g}{2}} \cdot t\right)^2$$ explizite spezielle Lösung

## Zahlenwerte:




Der zylindrische Wasserturm in der Skizze hat beispielsweise die folgenden Abmessungen (in Meter):

$r := 2.5$

$H := 10$

$T := 3.3$

Die Zylinderquerschnittsfläche ( $A_1 := r^2 \cdot \pi$) ist $A_1 = 19.635$ m², das Volumen im Zylinder ( $V_Z := A_1 \cdot T$) beträgt $V_Z = 64.795$ m³.

Als Ausflussquerschnitt wird ein Rohr mit $d := 0.1$ m Durchmesser angenommen ( $A_2 := \frac{0.1^2 \cdot \pi}{4}$).

Weiters ist die Erdbeschleunigung $g := 9.81$ m/s².

$$h_Z(t) := \left(\sqrt{H} - \frac{A_2}{A_1} \cdot \sqrt{\frac{g}{2}} \cdot t\right)^2$$

Definition der Lösung der Differentialgleichung in MCD als Funktion mit den gegebenen Zahlenwerten.

Berechnung der Auslaufzeit eines bis zum Boden reichenden Zylinders der Höhe H.

$$t_{Zges} := h_Z(tt) = 0 \text{ auflösen}, tt \rightarrow \begin{pmatrix} 3569.6078073176611674 \\ 3569.6078073176611674 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Auslaufzeit des abgebildeten Zylinders der Höhe T. (nur ein Wert der Lösung ist sinnvoll !)

$$t_{Zteil} := h_Z(tt) = H - T \text{ auflösen}, tt \rightarrow \begin{pmatrix} 647.75789130514555357 \\ 6491.4577233301767812 \end{pmatrix}$$

## Lösung mit Lösungsblock in Mathcad

Vorgabe

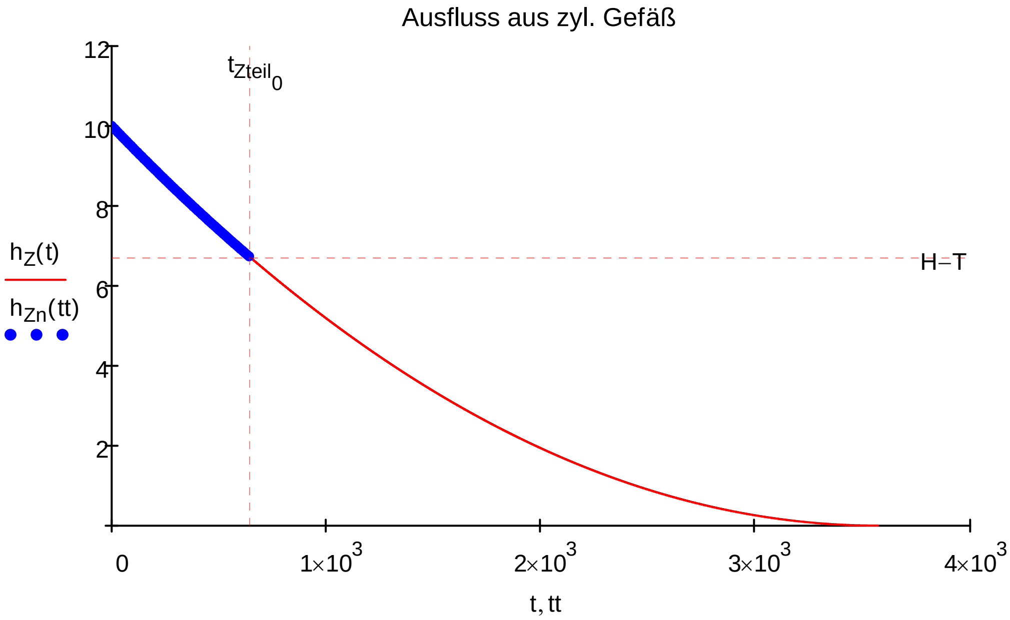
$$-\left(\frac{A_2 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h(t)}}{A_1}\right) = \frac{d}{dt}h(t) \qquad h(0) = H$$

$$h_{Zn} := \text{Gdglösen}\left(t, t_{Zteil_0}\right)$$

- Da die analytische Lösung zur Verfügung steht kann der Endpunkt für das numerische Verfahren einfach eingesetzt werden. Sonst ist eine Bestimmung über Probieren notwendig.
- Größere Werte als $t_{Zges}$ für den Endpunkt der numerischen Lösung werden mit Fehlermeldung quittiert. ("Wert muss reell sein. Sein Imaginärteil muss Null sein.")

# Darstellung der Ergebnisse

$tt := 0, 10 .. \text{floor}\left(t_{Zteil_0}\right)$ $t := 0, 0.1 .. t_{Zges_0}$




- Die graphische Gegenüberstellung der numerischen (Blau) und der analytischen Lösung (Rot dünn) zeigt keine Unterschiede !
- Die numerische Lösung (dicke blaue Linie) beschreibt das Auslaufen aus dem im Bild dargestellten Behälter bis zur Höhe H-T, der weitere Verlauf würde für einen bis zum Boden reichenden Zylinder gelten.
- In $t_{Zteil_0} = 647.758$ sec wird der im Bild dargestellte Behälter nur durch die Schwerkraft geleert.
- Die Nullstelle der analytischen Lösung ist nur ein Berührpunkt. Dies kann bei numerischen Lösungsverfahren zu Problemen führen zum Beispiel wenn die Lösung ausquadriert verwendet wird.

$$\left(\sqrt{H} - \frac{A_2}{A_1}\cdot\sqrt{\frac{g}{2}}\cdot t\right)^2 = H - 2\cdot\sqrt{H}\cdot\frac{A_2}{A_1}\cdot\sqrt{\frac{g}{2}}\cdot t + \frac{A_2^{\,2}}{A_1^{\,2}}\cdot\frac{g}{2}\cdot t^2 \quad \text{(siehe unten)}$$

- Die Berechnung der Nullstelle aus der numerischen Lösung ist nicht möglich, da diese nur maximal bis zum Scheitel der Parabel durchgeführt werden kann. Dieser Maximalwert wird durch Probieren bestimmt (Siehe Lösung mit Lösungsblock).

Die binomische Formel ist lösbar!

$$\left(\sqrt{H} - \frac{A_2}{A_1}\cdot\sqrt{\frac{g}{2}}\cdot t_n\right)^2 \ \text{auflösen}, t_n \ \rightarrow \begin{pmatrix} 3569.6078073176611674 \\ 3569.6078073176611674 \end{pmatrix}$$

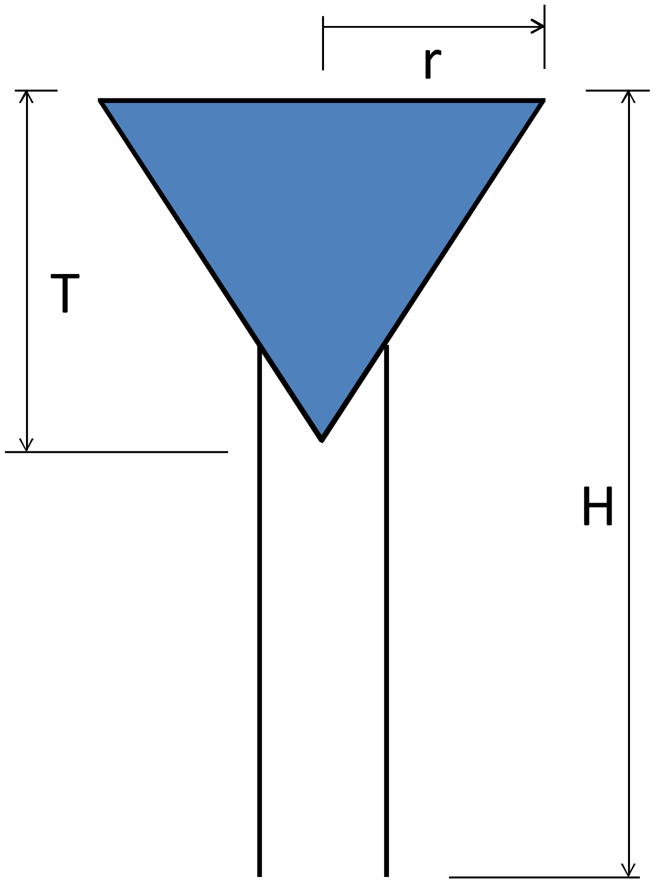
Die ausquadrierte binomische Formel erzeugt bereits eine komplexe Lösung, wobei der Realteil stimmt!

$$H - 2\cdot\sqrt{H}\cdot\frac{A_2}{A_1}\cdot\sqrt{\frac{g}{2}}\cdot t_n + \frac{A_2^{\,2}}{A_1^{\,2}}\cdot\frac{g}{2}\cdot t_n^{\,2} \ \text{auflösen}, t_n \ \rightarrow \begin{pmatrix} 3569.6078073176611672 - 9.261304898112482 \\ 3569.6078073176611672 + 9.261304898112482 \end{pmatrix}$$

Eine geringfügige Verschiebung nach unten erzeugt wieder eine reelle (fast) korrekte Lösung!

$$H - 10^{-12} - 2\cdot\sqrt{H}\cdot\frac{A_2}{A_1}\cdot\sqrt{\frac{g}{2}}\cdot t_n + \frac{A_2^{\,2}}{A_1^{\,2}}\cdot\frac{g}{2}\cdot t_n^{\,2} \ \text{auflösen}, t_n \ \rightarrow \begin{pmatrix} 3569.6066785089386244 \\ 3569.60893612638371 \end{pmatrix}$$

# 2. Ausfluss aus einem kegeligen Gefäß (Ausfluss bei Spitze) gleichen Volumens.




$$-\left[A_2 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (h + H - T)}\right] \cdot \Delta t = A_1(h) \cdot \Delta h$$

Im Vergleich zum Zylinder ist der Querschnitt nun eine Funktion der Höhe.
Bei der Ausflussgeschwindigkeit muss (unter der Wurzel) die erhöhte Lage berücksichtigt werden.

$$A_1(h) = (k \cdot h)^2 \cdot \pi$$

Ähnliche Dreiecke ergeben den Zusammenhang zwischen Radius und Höhe: $r = k \cdot h$ (wobei $k = \tan(\alpha)$ dem halben Spitzenwinkel des Kegels entspricht.)

$$-\left[A_2 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (h + H - T)}\right] \cdot \Delta t = (k \cdot h)^2 \cdot \pi \cdot \Delta h$$

Nullpunkt des Koordinatensystems ist die Spitze des Kegels

$$-\frac{A_2 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (h + H - T)}}{(k \cdot h)^2 \cdot \pi} = \frac{dh}{dt} \qquad h(0) = T$$

Somit ergibt sich die Differentialgleichung und der Anfangswert.

$$-\frac{A_2 \cdot \sqrt{2 \cdot g}}{\pi \cdot k^2} \cdot dt = \frac{h^2}{\sqrt{h + H - T}} \cdot dh$$

Trennen der Variablen und die entstehenden Integrale

Eine analytische Lösung ist in diesem Fall auch mit MCD bereits deutlich aufwändiger !
Daher wird nur eine numerische Lösung durchgeführt !

## Zahlenwerte:

Der kegelige Wasserturm in der Skizze hat beispielsweise die folgenden Abmessungen (in Meter):

$r := 4.2$ $\qquad H := 10$ $\qquad T := 3.5$

Das Kegelvolumen ( $V_K := \frac{r^2 \cdot \pi \cdot T}{3}$ ) beträgt $V_K = 64.654$ m³. (Ungefähr gleich dem obigen Zylinder)

Der (halbe) Öffnungswinkel des Kegels ( $k := \frac{r}{T}$ ) ist $\operatorname{atan}(k) = 50.194 \cdot \mathrm{Grad}$

Als Ausflussquerschnitt wird wieder ein Rohr mit $d := 0.1$ m Durchmesser angenommen ( $A_2 := \frac{0.1^2 \cdot \pi}{4}$ ).

Weiters ist die Erdbeschleunigung $g := 9.81$ m/s².

## Lösung mit Lösungsblock in Mathcad

Vorgabe

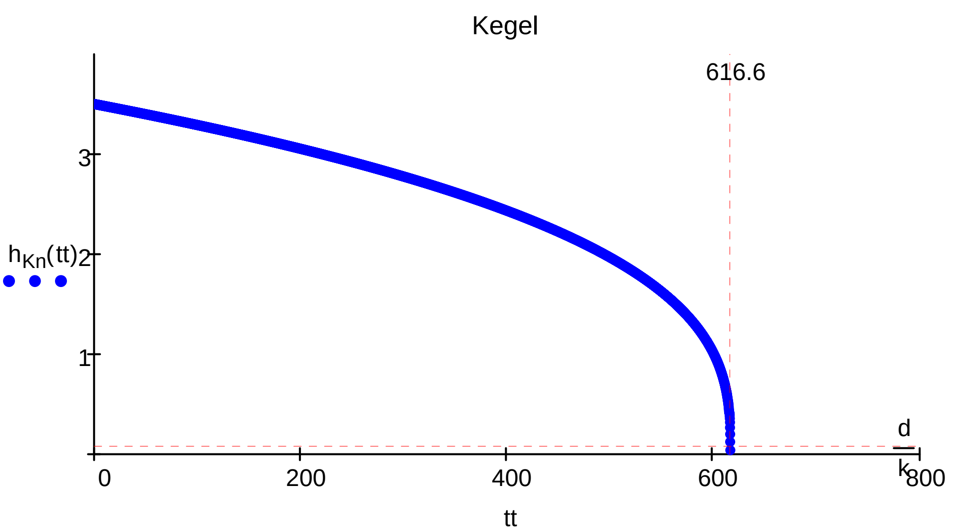
$$-\frac{A_2 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (h(t) + H - T)}}{(k \cdot h(t))^2 \cdot \pi} = \frac{d}{dt} h(t) \qquad h(0) = T$$

$h_{Kn} := \mathrm{Gdglösen}(t, 616.6)$

Der Endpunkt der numerischen Lösung muss kleiner als die zum Ausfließen benötigte Zeit sein. Sonst liefert gdglösen eine Fehlermeldung !! ("Wert muss reell sein. Sein Imaginärteil muss Null sein.")
Dieser Wert ist durch Probieren zu bestimmen.

## Darstellung der Ergebnisse

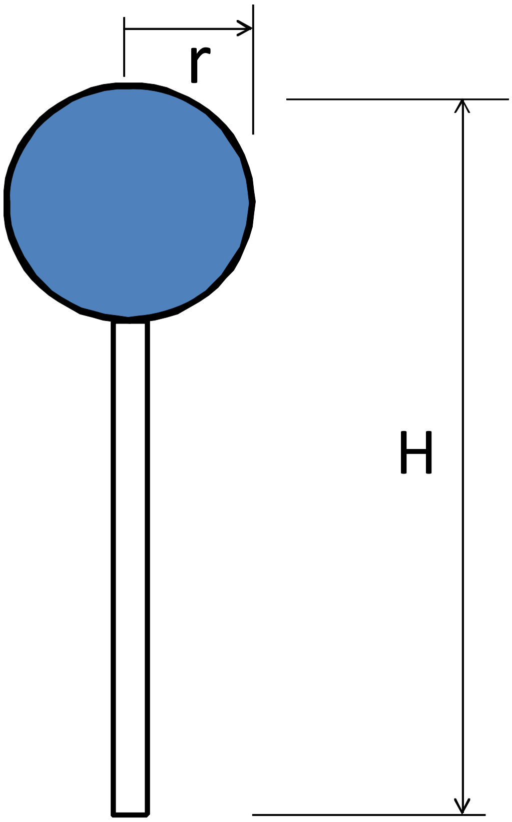
$tt := 0, 0.1 .. 620$




Das Ergebnis scheint eine Wurzelfunktion zu sein. Die Nullstelle ist durch Probieren zu bestimmen.
Praktisch ist dies ohne Belang, da der Kegel an der Spitze seinen Ausfluss hat und wegen des Abflussanschlusses nicht bis zur Spitze zu rechnen ist ( $\frac{d}{k} = 0.083$ weniger).

Aufgrund der Steilheit der Lösung ist der Unterschied im Ergebnis gering. (Siehe rot strichlierte Markierungen)

# 2. Ausfluss aus einer Kugel gleichen Volumens.




$$-\left[A_2 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (h + H - r)}\right] \cdot \Delta t = A_1(h) \cdot \Delta h$$

Im Vergleich zum Zylinder ist der Querschnitt nun ebenfalls eine Funktion der Höhe. Bei der Ausflussgeschwindigkeit muss (unter der Wurzel) die erhöhte Lage berücksichtigt werden.

$$A_1(h) = \left(r^2 - h^2\right) \cdot \pi$$

Der waagrechte Querschnitt der Kugel in der Höhe h wird durch den Satz von Pythagoras beschrieben.

$$-\left[A_2 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (h + H - r)}\right] \cdot \Delta t = \left(r^2 - h^2\right) \cdot \pi \cdot \Delta h$$

Einsetzen in die Gleichung.
Nullpunkt des Koordinatensystems ist der Mittelpunkt der Kugel.

$$-\frac{A_2 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (h + H - r)}}{\left(r^2 - h^2\right) \cdot \pi} = \frac{dh}{dt} \qquad h(0) = r$$

Somit ergibt sich die Differentialgleichung und der Anfangswert.

## Zahlenwerte:

Der kugelige Wasserturm im Bild hat beispielsweise die folgenden Abmessungen (im Meter):

Eine Kugel mit $r := 2.5$ m hat ein Volumen ( $V_S := \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$) von $V_S = 65.45$ m³ (Dies entspricht ungefähr auch den anderen Volmina.)
Als Höhe werden $H := 10$ m angenommen.

## Lösung mit Lösungsblock in Mathcad

Vorgabe

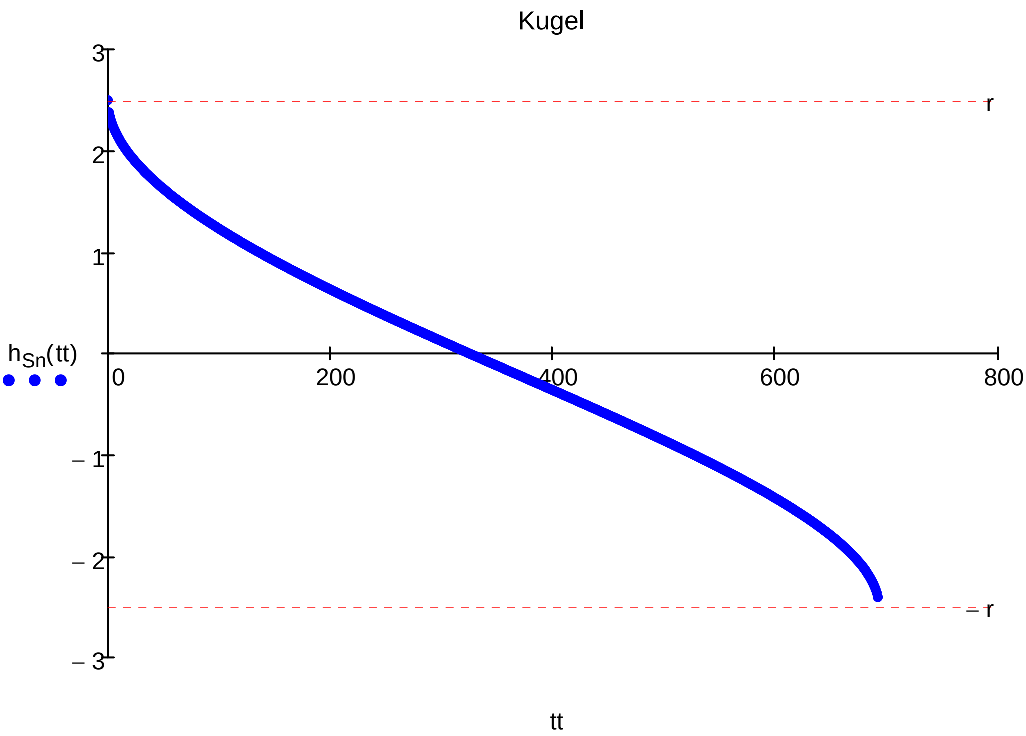
$$-\frac{A_2 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (h(t) + H - r)}}{\left(r^2 - h(t)^2\right) \cdot \pi} = \frac{d}{dt}h(t) \qquad h(0) = r \cdot 0.999$$

$h_{Sn} := \text{Gdglösen}(t, 692)$

Als Endpunkt der numerischen Lösung können hier beliebige Werte verwendet werden. Allerdings zeigen sich Artefakte bei Werten, die über der Ausflusszeit liegen !
Beim Anfangswert würde im Nenner der Wert 0 entstehen (Fehlermeldung in MCD!), daher wird dieser geringfüg um 0,01% reduziert.

## Darstellung der Ergebnisse

$tt := 0 .. 700$




Eine numerische Bestimmung der Zeit bis zur halben Entleerung ist nun möglich

$tn := 300 \qquad \text{wurzel}\left(h_{Sn}(tn), tn\right) = 324.461$

Aufgrund des senktrechten Verlaufs am Anfang bzw Ende ist eine exakte Bestimmung der Auslaufzeit nicht möglich
Die Entleerung bis 81% des Kugelradius kann berechnet werden, dann kommen Fehlermeldungen. Durch die Steilheit der Lösungskurve in diesem Bereich ist die ausgegebene Lösung ungefähr korrekt.

$tn := 600 \qquad \text{wurzel}\left(h_{Sn}(tn) + r \cdot 0.81, tn\right) = 672.181$

Wie zu erwarten ist die Zeit zur Entleerung der zweiten Hälfte größer als für die erste Hälfte.

$$\begin{matrix} \text{:231e-7i} \\ \text{:231e-7i} \end{matrix}\Bigg)$$